詳細解答

STEP III 1999，第 4 題

純數學 • 歐拉公式與多面體

> **STEP III 1999，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q4

本題在 *Beyond STEP* 第 7.9 節只有五種柏拉圖立體中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch07/platonic-solids.html

關鍵思路

用兩種不同的方法數棱（edge）：一次逐個面（face）去數，一次逐個頂點（vertex）去數。每種數法都把 E 用 F（或 V）表示出來，代入歐拉公式（Euler's formula）後，便只剩下一條關於 F 的方程。之後整個分類只取決於一項觀察：F 是正數，所以 h 必須是正數，於是只剩下寥寥幾組整數對 (m, n)。

解答

推導 F 的公式

每個面都是 m 邊形，所以有 m 條棱。逐個面去數它的棱，總數是 mF。但每條棱恰好是兩個面之間的邊界，所以這樣數會把每條棱數了兩次：

$$mF = 2E.$$

同樣地，每個頂點有 n 條棱相交，所以逐個頂點去數棱，總數是 nV。每條棱恰好有兩個端點，所以這樣數也把每條棱數了兩次：

$$nV = 2E.$$

因此 $E = \frac{1}{2}mF$，而 $V = \frac{2E}{n} = \frac{mF}{n}$。代入 $V - E + F = 2$ 得

$$\frac{mF}{n} - \frac{mF}{2} + F = 2$$
$$F(2m - mn + 2n) = 4n \qquad \text{（兩邊乘以 } 2n\text{）.}$$

現在把題目給出的 h 展開：

$$4 - (n-2)(m-2) = 4 - (mn - 2m - 2n + 4) = 2m + 2n - mn,$$

這正好就是括號內的式子。所以 $Fh = 4n$。這裏 F 和 n 都是正數，所以 $h \neq 0$，可以相除：

$$F = \frac{4n}{h}, \qquad h = 4 - (n-2)(m-2),$$

這就是所要證明的結果。

只有五種正多面體

想一想 有哪些對 m 和 n 的限制是來自幾何，而不是來自公式？

多邊形最少有三條邊，所以 $m \geq 3$。在立體的一個頂點處，最少要有三個面相交：只有兩個面在一個角上相交，得到的只是一塊扁平的摺片，而不是立體的一個角。所以同樣有 $n \geq 3$。於是 $m - 2 \geq 1$ 及 $n - 2 \geq 1$。

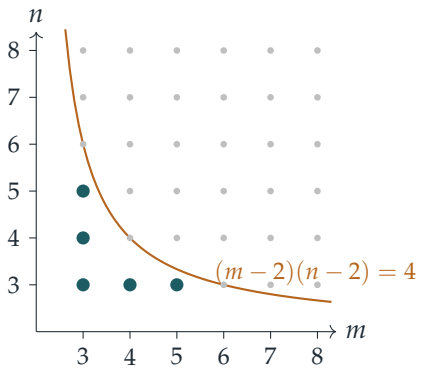
由於 $F > 0$ 及 $4n > 0$，公式迫使 $h > 0$，即

$$(m-2)(n-2) < 4.$$

因此兩個正整數 $m-2$ 與 $n-2$ 的積是 1、2 或 3，所以 $h = 3$、2 或 1。僅有的因數分解（factorisation）是

- $(m-2)(n-2) = 1$：$m = n = 3$，所以 $h = 3$；
- $(m-2)(n-2) = 2$：$(m,n) = (3,4)$ 或 $(4,3)$，所以 $h = 2$；
- $(m-2)(n-2) = 3$：$(m,n) = (3,5)$ 或 $(5,3)$，所以 $h = 1$。

下圖顯示的是同一回事：滿足 $m, n \geq 3$ 並嚴格位於雙曲線（hyperbola）$(m-2)(n-2) = 4$ 以內的格點（lattice point）。



對每一組數對，$F = 4n/h$、$E = \frac{1}{2}mF$ 及 $V = mF/n$：

	m	n	h	V	E	F
正四面體（tetrahedron）	3	3	3	4	6	4
正八面體（octahedron）	3	4	2	6	12	8
正方體（cube）	4	3	2	8	12	6
正二十面體（icosahedron）	3	5	1	12	30	20
正十二面體（dodecahedron）	5	3	1	20	30	12

例如，對正二十面體，$F = 4 \cdot 5/1 = 20$、$E = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 20 = 30$ 及 $V = 3 \cdot 20/5 = 12$。

所以 (m, n) 最多只有五種可能的組合。每一種都確實存在，表中列出的五種為人熟悉的柏拉圖立體（Platonic solid）就是例證。所以正多面體（regular polyhedron）恰好有五種。

驗算

- 每一行都滿足 $V - E + F = 2$。對正十二面體，$20 - 30 + 12 = 2$。
- 正方體給出 $V = 8$、$E = 12$、$F = 6$，你可以拿一粒骰子來數一數。
- 把 m 和 n 對調，V 和 F 便會對調，而 E 保持不變（正方體與正八面體、正十二面體與正二十面體）。這就是對偶性（duality）：在每個面的中心放一個頂點。
- 一項獨立的驗算：每個頂點的角虧（angle deficit）$2\pi - n\pi(m-2)/m$ 必須是正數，而全部 V 個頂點的角虧總和是 4π（笛卡兒定理，Descartes' theorem）。五種立體全都符合，而用電腦搜尋 $3 \le m, n < 200$ 的範圍，也找不到其他滿足 $h > 0$ 的數對。

常見錯誤

- 數棱時忘記了因子 2：每條棱屬於兩個面，並有兩個端點。
- 沒有說明為甚麼 $n \geq 3$。少了這個條件，$n = 2$ 時對每個 m 都有 $h = 4$，於是會出現無限多個「解」。
- 單憑數算就下結論說「恰好五種」。這個論證只說明最多有五種；你還需要實際的立體，才能說明每種情況都存在。

STEP 之外

歐拉公式是拓撲學（topology）的起點。無論用哪種方法把一個曲面分割成面，$V - E + F$ 這個數（即歐拉示性數（Euler characteristic））都是一樣的，所以球面是 2，環面（torus）是 0，如此類推。在環面上重複這個論證，會得到無限多種「正則」的鋪砌（tiling），例如正方形網格。這五種立體的對稱羣（symmetry group），也是羣論（group theory）入門課程中的核心例子。想讀一本生動有趣的介紹，可看 Richeson 的 *Euler's Gem*；Armstrong 的 *Basic Topology* 則把這些想法再推進一步。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。