詳細解答

STEP III 1999，第 3 題

純數學 • 黎曼和與極限

> **STEP III 1999，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q3

關鍵思路

算式 $\frac{1}{n}\sum f(1+m/n)$ 是豎立在 $[1,2]$ 上的 n 個闊度為 $\frac{1}{n}$ 的幼長矩形的總面積；矩形愈來愈幼時，它們便恰好填滿曲線下的面積。另外兩個極限（limit）其實是同一幅圖畫的變相：要做的就是抽出因子 $\frac{1}{n}$，再把每一項寫成只含 m/n 的函數。

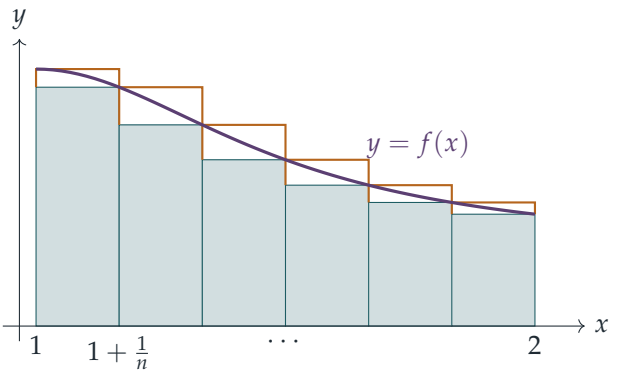
解答

極限公式

把 $[1,2]$ 分成 n 條闊度為 $\frac{1}{n}$ 的長條；第 m 條是 $[1+\frac{m-1}{n},\, 1+\frac{m}{n}]$。在這長條上豎立一個矩形，其高度取 f 在長條右端的值 $f(1+m/n)$。它的面積是 $\frac{1}{n}f(1+m/n)$，所以

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f(1+m/n)$$

就是這些矩形的總面積。



草圖所示的是一個遞減的 f。着色（藍綠色）的矩形以右端的函數值為高，因此位於曲線之下；頂上的琥珀色梯級則顯示改用左端的函數值為高時所得的矩形，它們位於曲線之上。因此

$$S_n \;\le\; \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \;\le\; S_n + (\text{琥珀色部分的總面積}).$$

現在把所有琥珀色部分橫向平移，疊成闊度為 $\frac{1}{n}$ 的單獨一列：由於各段高度逐項相消（telescope），它們疊起來的總高度是 $f(1)-f(2)$。所以

$$0 \;\le\; \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x - S_n \;\le\; \frac{f(1)-f(2)}{n} \;\longrightarrow\; 0 \quad \text{當} n\to\infty,$$

於是 $S_n \to \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$。遞增的 f 可用同樣方法處理，只是不等號的方向相反；而任何合理的函數（例如連續而且分段單調（piecewise monotonic）的函數）都可以切成有限多個單調的部分，每部分所帶來的誤差都是 $\frac{1}{n}$ 的量級。這就說明了

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f(1+m/n) = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

極限 $\ln 2$

? **想一想** 怎樣才能令 $\dfrac{1}{n+m}$ 看起來像 $\dfrac{1}{n}f(1+m/n)$？

從分母抽出因子 n：

$$\frac{1}{n+m} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+m/n} = \frac{1}{n}f(1+m/n) \qquad \text{其中} f(x)=\frac{1}{x}.$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{1+m/n}\\ &= \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln 2-\ln 1 = \ln 2,\end{aligned}$$

正如所求。（這裏 f 是遞減的，所以草圖的論證完全適用；它甚至告訴我們，這個和介乎 $\ln 2 - \frac{1}{2n}$ 與 $\ln 2$ 之間。）

最後一個極限

第 m 項是 $\dfrac{n}{n^2+m^2}$，其中 $m = 1, \ldots, n$。把分子和分母同時除以 n^2：

$$\frac{n}{n^2+m^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+(m/n)^2}.$$

公式是在 $x = 1 + m/n$ 處計算 f 的值，要與它吻合，便需要 $f(x) = \dfrac{1}{1+(x-1)^2}$，因為這樣就有 $f(1+m/n) = \dfrac{1}{1+(m/n)^2}$。這個 f 在 $[1,2]$ 上是遞減的。因此

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \frac{n}{n^2+m^2} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{1+(x-1)^2} = \Big[\tan^{-1}(x-1)\Big]_1^2$$
$$= \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{4}.$$

（另一個等價的做法是代入 $u = x - 1$，得出 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$。）

驗算

這些和可以直接計算。取 $n = 1000$，第二個和是 0.69290，而 $\ln 2 \approx 0.69315$；第三個和是 0.78515，而 $\pi/4 \approx 0.78540$。兩者的差距都約為 $\frac{1}{4000}$，在草圖所給出的界 $\frac{f(1)-f(2)}{n} = \frac{1}{2000}$ 之內。兩個和也都略低於極限；對於遞減的 f 並以右端的函數值為高，結果正應如此。

常見錯誤

- 把第三個極限寫成 $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$：公式是在 $1 + m/n$ 處而不是在 m/n 處計算 f 的值，所以那個 1 的平移必須放進 f 裏面。
- 忘記最後一項（$m = n$）是 $\frac{n}{2n^2}$，它對應 $\frac{1}{n}f(2)$：求和的範圍是全部 n 個右端點，而不是 $n+1$ 個點。

STEP 之外

這些都是黎曼和（Riemann sum），而草圖的論證正是黎曼積分（Riemann integral）定義的雛形：當上和（upper sum）與下和（lower sum）可以夾迫到一起時，函數便是可

積（integrable）的，而閉區間上的每個連續函數都具有這個性質。同一個想法也可以倒過來用，把和化為積分來估算，例如用於證明 $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ 收斂。Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本數學分析入門書）中有一章講黎曼積分，寫得十分易讀。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。