詳細解答

# STEP III 1999，第 2 題

純數學 • 實根的計數

**STEP III 1999，第 2 題**

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/99-s3-q2

## 關鍵思路

在第 (i) 部分，導數（derivative）可以分解為一個完全平方（perfect square）乘以 $\mathrm{e}^x$，所以函數永不遞減，而事實上它是嚴格遞增（strictly increasing）的。在第 (ii) 部分，新函數的導數恰好在 $(1+x^2)\mathrm{e}^x = k$ 時為零，而這正是第 (i) 部分的方程。由此可知，新函數只有一個轉向點（turning point），而且是極小點（minimum）。之後，一切都取決於 $x \to -\infty$ 時的情況，此時 $\tan^{-1} x \to -\frac{\pi}{2}$。$2/\pi$ 這個數就是由此而來。

## 解答

### 第 (i) 部分

由積法則（product rule），

$$\mathrm{f}'(x) = 2x\,\mathrm{e}^x + (1+x^2)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\left(x^2+2x+1\right) = \mathrm{e}^x(1+x)^2.$$

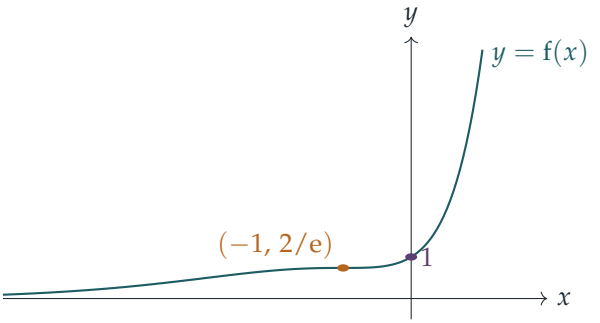
由於 $\mathrm{e}^x > 0$ 且 $(1+x)^2 \geq 0$，對所有 $x$ 都有 $\mathrm{f}'(x) \geq 0$，正如所求。等號只在 $x = -1$ 時成立。

? **想一想** $\mathrm{f}'(-1) = 0$，那麼 f 真的是嚴格遞增嗎？

是的。若 $a < b$，則 $\mathrm{f}(b) - \mathrm{f}(a) = \int_a^b \mathrm{f}'(x)\,\mathrm{d}x$，而被積函數（integrand）連續（continuous）、非負，並且在 $[a,b]$ 上最多只有一點為零，所以這個積分嚴格為正。單單一個駐點（stationary point）並不能阻止函數遞增。這裏 $x = -1$ 是一個駐拐點（stationary point of inflection）：$\mathrm{f}'$ 在它的兩側都是正的。

要畫出略圖，我們需要：

- 對所有 $x$ 都有 $\mathrm{f}(x) > 0$，因為兩個因子都是正的；
- $\mathrm{f}(0) = 1$，而拐點是 $(-1, 2/\mathrm{e}) \approx (-1, 0.74)$；
- 當 $x \to \infty$ 時，$\mathrm{f}(x) \to \infty$；
- 當 $x \to -\infty$ 時，$\mathrm{f}(x) \to 0$，因為 $\mathrm{e}^x$ 衰減的速度比任何多項式增長的速度都快（$x^2\mathrm{e}^x \to 0$）。所以負 $x$ 軸是一條漸近線（asymptote）。




現在 f 連續且嚴格遞增，並且當 $x \to -\infty$ 時 $\mathrm{f}(x) \to 0$，當 $x \to \infty$ 時 $\mathrm{f}(x) \to \infty$。所以它取遍 $(0, \infty)$ 內的每一個值（介值定理（intermediate value theorem）），而且每個值恰好取一次（嚴格遞增）。它永遠不會取 $\leq 0$ 的值，因為 $\mathrm{f} > 0$。因此 $(1 + x^2)\mathrm{e}^x = k$ 在 $k > 0$ 時恰有一個實根（real root），在 $k \leq 0$ 時沒有實根。 ■

**第 (ii) 部分**

設

$$\mathrm{g}(x) = \mathrm{e}^x - 1 - k \tan^{-1} x.$$

立即可見 $\mathrm{g}(0) = 1 - 1 - 0 = 0$，所以 $x = 0$ 永遠是一個根。其次，

$$\mathrm{g}'(x) = \mathrm{e}^x - \frac{k}{1 + x^2} = \frac{(1 + x^2)\mathrm{e}^x - k}{1 + x^2} = \frac{\mathrm{f}(x) - k}{1 + x^2}.$$

兩種情況下都有 $k > 0$，所以由第 (i) 部分，恰有一個數 $a$ 滿足 $\mathrm{f}(a) = k$。因為 f 嚴格遞增，當 $x < a$ 時 $\mathrm{f}(x) < k$，當 $x > a$ 時 $\mathrm{f}(x) > k$。因此

$$\mathrm{g}'(x) < 0 \text{ 對於} x < a, \qquad \mathrm{g}'(x) > 0 \text{ 對於} x > a.$$

所以 g 在 $(-\infty, a]$ 上嚴格遞減（strictly decreasing），在 $[a, \infty)$ 上嚴格遞增，並在 $x = a$ 處有唯一的極小點。特別地，g 在 $a$ 的每一側最多只有一個根，所以總共最多有兩個根。

**$a$ 在哪裏？** 兩種情況下都有 $k < 1 = \mathrm{f}(0)$，所以 $\mathrm{f}(a) = k < \mathrm{f}(0)$，由此得 $a < 0$。於是 $x = 0$ 位於遞增的一段 $[a, \infty)$ 內。它是該處唯一的根，並且

$$\mathrm{g}(a) < \mathrm{g}(0) = 0.$$

餘下要判斷的，是 g 在 $(-\infty, a)$ 內是否還有一個根。

**$x \to -\infty$ 時的表現。** 由於 $\mathrm{e}^x \to 0$ 且 $\tan^{-1} x \to -\frac{\pi}{2}$，

$$\mathrm{g}(x) \to -1 + \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\left(k - \frac{2}{\pi}\right) \quad \text{當} x \to -\infty.$$

把這個極限（limit）記作 $L$。因為 g 在 $(-\infty, a]$ 上嚴格遞減，g 在該處的每一個值都嚴格小於 $L$。要看出這一點，取 $x \le a$ 和任意 $x' < x$。每一個 $y < x'$ 都滿足 $\mathrm{g}(y) > \mathrm{g}(x')$，所以令 $y \to -\infty$ 可得 $L \ge \mathrm{g}(x')$。因此 $\mathrm{g}(x) < \mathrm{g}(x') \le L$。

**(a)** $0 < k \le 2/\pi$。 這時 $L \le 0$，所以對每一個 $x \le a$ 都有 $\mathrm{g}(x) < L \le 0$。在 $a$ 的左方沒有根，故方程**恰有一個實根**，就是 $x = 0$。

**(b)** $2/\pi < k < 1$。 這時 $L > 0$，所以對所有足夠負的 $x$ 都有 $\mathrm{g}(x) > 0$，而 $\mathrm{g}(a) < 0$。由介值定理，在 $(-\infty, a)$ 內有一個根，而且因為 g 嚴格遞減，它是該處唯一的根。連同 $x = 0$，方程**恰有兩個實根**：一個負根（小於 $a$）和 $x = 0$。

> **想一想** 為甚麼邊界情況 $k = 2/\pi$ 歸入 (a)？

當 $k = 2/\pi$ 時，左方的極限恰好是 $L = 0$。遞減的一支從下方趨近 0，但永遠不會到達，所以不會出現第二個根。這一點正是靠嚴格單調性（strict monotonicity）來決定的。

## 驗算

- 在隨機選取的點上以數值方法對 f 求導，結果與 $\mathrm{e}^x(1+x)^2$ 吻合，而且 $\mathrm{f}(-1) = 2/\mathrm{e} \approx 0.736$。
- 我們在 $[-200, 10]$ 上用細密的格點數算 g 的變號次數。當 $k = 0.05, 0.3, 0.5, 0.6$ 和 $2/\pi \approx 0.6366$ 時有一個根，當 $k = 0.65, 0.7, 0.8, 0.9, 0.99$ 時有兩個根。當 $k = 0.65$ 時，負根離得很遠（在 $x \approx -31$ 附近），因為 $L = 0.65 \cdot \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0.021$ 非常小。
- 當 $k = 0.7$ 時，極小點是 $a \approx -1.81$，而當 $k \to 1^-$ 時 $a \to 0^-$。這是吻合的：在 $k = 1$ 時，$\mathrm{g}'(0) = 0$，$x = 0$ 成為二重根（double root）。

## 常見錯誤

- 忘記了 $x = 0$ 永遠是一個根，於是只數算由 $-\infty$ 處變號而來的根。
- 以為當 $x \to -\infty$ 時 $\tan^{-1} x \to -\infty$。其實它是有界（bounded）的，趨向 $-\frac{\pi}{2}$。

► 由 $\mathrm{f}'(-1) = 0$ 斷定 f 在 $x = -1$ 處有轉向點。

## STEP 之外

這裏的論證是實分析（real analysis）中一種標準技巧的典範：在某區間上嚴格單調的連續函數在該區間內最多只有一個零點（zero），而介值定理（配合無窮遠處的極限使用）則告訴我們它何時確有一個零點。先找出函數的轉向點，再檢查函數在轉向點和兩端的正負號，從而數算根的數目，這正是羅爾定理（Rolle's theorem）及其推論背後的想法。Abbott 的 *Understanding Analysis* 嚴謹地闡述了連續性、介值定理和均值定理（mean value theorem）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。