詳細解答

STEP III 1999，第 14 題

概率與統計 • 以條件化求期望值

STEP III 1999，第 14 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/99-s3-q14

關鍵思路

在 H1 中，獎金只取決於首次成功在何時出現，因此期望值（expectation）是一個有限的等差等比級數（arithmetico-geometric series）之和 $\sum r\,p\,q^{r-1}$。處理這類和式的標準技巧，是把和式減去它自身的 q 倍。在 H2 中，我們以回合數 N 為條件，再把 H1 的答案按泊松分佈（Poisson distribution）取平均。這只需用到泊松和式 $\sum \lambda^n x^n/n!$ 與 $\sum n\lambda^n x^n/n!$，兩者都可由指數級數（exponential series）得出。

解答

遊戲 H1

設 W 為她的獎金（以英鎊計）。各回合互相獨立，每回合成功的概率為 p。她首次成功出現在第 r 回合，當且僅當首 $r-1$ 回合均失敗而第 r 回合成功，所以

$$\mathrm{P}(W=r)=q^{r-1}p \qquad (1\le r\le n),$$

其餘情況下 $W=0$，對期望值沒有貢獻。因此

$$\mathrm{E}(W)=p\,S, \qquad \text{其中} S=\sum_{r=1}^{n} r\,q^{r-1}=1+2q+3q^2+\cdots+nq^{n-1}.$$

乘以 q 後相減，並把 q 的同次冪對齊：

$$\begin{aligned} S-qS &= 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}-nq^n \\ &= \frac{1-q^n}{1-q}-nq^n, \end{aligned}$$

這裏用了等比級數（geometric series）的求和公式；由於 $q \neq 1$，公式成立。因為 $1-q=p$，由此得 $S=\dfrac{1-q^n}{p^2}-\dfrac{nq^n}{p}$，於是

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(W)=pS&=\frac{1-q^n-npq^n}{p}=\frac{1-q^n-n(1-q)q^n}{p}\\&=p^{-1}\left[1+nq^{n+1}-(n+1)q^n\right],\end{aligned}$$

這正是所要求的結果。

遊戲 H2

設 $N\sim\mathrm{Po}(\lambda)$ 為她獲准進行的回合數，則 $\mathrm{P}(N=n)=\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^n/n!$。記

$$g(n)=p^{-1}\left[1+nq^{n+1}-(n+1)q^n\right].$$

已知 $N=n\geq 1$ 時，她玩的是有 n 個回合的 H1，所以獎金的期望值為 $g(n)$。已知 $N=0$ 時，她一無所獲。根據全期望定律（law of total expectation，即以 N 為條件），

$$\mathrm{E}(W)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}(N=n)\,g(n).$$

> **想一想** $g(n)$ 的三個部分若寫成由 $n=0$ 開始的完整泊松和式，會較易處理。我們可以讓和式由 $n=0$ 開始嗎？

可以：$g(0)=p^{-1}[1+0-1]=0$，與 $N=0$ 時獎金為零相符。所以

$$\mathrm{E}(W)=\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\left[1+nq^{n+1}-nq^n-q^n\right].$$

第一項之和為 1，因為各概率之和為 1。至於其餘各項，我們需要兩個級數，兩者對所有實數 x 都成立：

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(\lambda x)^n}{n!}&=\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x},\\\sum_{n=0}^{\infty}n\,\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(\lambda x)^n}{n!}&=\lambda x\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}=\lambda x\,\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x}.\end{aligned}$$

取 $x=q$，並留意 $\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda q}=\mathrm{e}^{-\lambda(1-q)}=\mathrm{e}^{-\lambda p}$。於是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\,q^n=\mathrm{e}^{-\lambda p},\qquad\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\,nq^n=\lambda q\,\mathrm{e}^{-\lambda p}.$$

nq^{n+1} 這一項是 nq^n 的 q 倍，所以它的貢獻是 $\lambda q^2 \mathrm{e}^{-\lambda p}$。綜合起來，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(W) &= \frac{1}{p}\left[1 + \lambda q^2 \mathrm{e}^{-\lambda p} - \lambda q\,\mathrm{e}^{-\lambda p} - \mathrm{e}^{-\lambda p}\right] \\ &= \frac{1}{p}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda p}) + \frac{\lambda q(q-1)}{p}\,\mathrm{e}^{-\lambda p} \\ &= \frac{1}{p}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda p}) - \lambda q\,\mathrm{e}^{-\lambda p},\end{aligned}$$

最後一步用了 $q - 1 = -p$。這就是所要求的表達式，以英鎊計。

驗算

- H1 取 $n = 1$：公式給出 $p^{-1}[1 + q^2 - 2q] = p^{-1}(1-q)^2 = p$。這是正確的，因為她以概率 p 贏得 £1。
- 在 H1 中當 $n \to \infty$ 時，$q^n \to 0$ 且 $nq^n \to 0$，所以期望值趨向 $1/p$，即幾何分佈（geometric distribution）的平均值。同樣地，當 $\lambda \to \infty$ 時，H2 的結果也趨向 $1/p$。
- 當 λ 很小時，把指數函數展開，得 $\lambda - \frac{1}{2}\lambda^2 p - \lambda q + O(\lambda^2) = \lambda p + O(\lambda^2)$。這合乎情理：她幾乎總是沒有回合或只有一個回合，而 $\mathrm{P}(N = 1) \approx \lambda$。
- 數值方面，對 $n \le 14$，H1 的公式與直接求和的結果完全吻合（以分數計算）。H2 的公式與截斷後的泊松和式吻合；另外，取 $\lambda = 2$、$p = 0.4$ 模擬 4×10^5 局遊戲，得 0.836，而公式給出的是 0.837。

常見錯誤

- 弄錯 $S - qS$ 的最後一項：和式 S 止於 nq^{n-1}，所以 qS 會剩下 $-nq^n$。
- 忘記 $\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda q}$ 可化簡為 $\mathrm{e}^{-\lambda p}$，結果在代數運算中迷失方向。

STEP 之外

H2 中用到的和式 $\sum \mathrm{P}(N = n)\,x^n$，其實是**概率生成函數**（probability generating function）$G_N(x) = \mathrm{E}(x^N)$ 的值，而 $\sum n\,\mathrm{P}(N = n)\,x^n = xG_N'(x)$。對泊松變量而言，$G_N(x) = \mathrm{e}^{\lambda(x-1)}$。生成函數，加上以隨機的試驗次數為條件這一手法，是大學一年級概率論的核心工具，例如用於研究隨機和（random sums）與分支過程（branching processes）。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）對兩者都有清晰的講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。