詳細解答

STEP III 1999，第 13 題

概率與統計 • 連續先驗分佈的貝葉斯定理

STEP III 1999，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/99-s3-q13

關鍵思路

這裏有兩層隨機性：首先是我那一份的大小 X，然後是提子乾落在哪裏。一旦以 $X = x$ 爲條件（condition），每粒提子乾落在我那一份的概率都是 x，而且各粒之間互相獨立，所以提子乾的數目服從二項分佈（binomial distribution）。之後，第 (i) 部分用的是全期望定律（law of total expectation），第 (ii) 部分用的是帶有連續先驗分佈（continuous prior）的貝葉斯定理（Bayes' theorem）。

解答

首先求 A。概率密度函數（density）的積分必須等於 1：

$$\int_0^1 Ax\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad A = 2,$$

所以 X 在 $[0,1]$ 上的密度為 $\mathrm{f}(x) = 2x$。

設 N 為我那一份中提子乾的數目。我們以最自然的方式為「隨機放置」建立模型：每粒提子乾的位置在整個蛋糕內均勻分佈（uniformly distributed），並且與其他提子乾的位置以及我取多少蛋糕都互相獨立。因此，若我取了蛋糕的比例為 x，每粒提子乾落在我那一份的概率就是 x，各粒之間互相獨立，所以

$$N \mid (X = x) \sim \mathrm{B}(4, x).$$

第 (i) 部分

給定 $X = x$，二項分佈的平均值為 $\mathrm{E}(N \mid X = x) = 4x$。對 X 取平均（即全期望定律），

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N) &= \int_0^1 \mathrm{E}(N \mid X = x)\,\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 4x \cdot 2x\,\mathrm{d}x \\ &= 8\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

等價地，$\mathrm{E}(N) = 4\,\mathrm{E}(X)$，其中 $\mathrm{E}(X) = \frac{2}{3}$。我那一份中提子乾數目的期望值是 $\frac{8}{3}$。

第 (ii) 部分

我們要求 $\mathrm{P}(X > \frac{1}{2} \mid N = 4)$。給定 $X = x$，四粒提子乾全部落在我那一份的概率是 x^4。

> **想一想** 當 X 是連續的，而 $\mathrm{P}(X = x) = 0$ 時，我們怎樣運用貝葉斯定理？

我們把貝葉斯定理中的求和換成對密度的積分。在各種可能的份量大小之中，一小段 $[x, x + \mathrm{d}x]$ 的概率是 $2x\,\mathrm{d}x$，而在這一小段之下，四粒提子乾全中的機會是 x^4。把各小段加起來，

$$\mathrm{P}(N = 4) = \int_0^1 x^4 \cdot 2x\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x^5\,\mathrm{d}x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

同樣地，只保留 $x > \frac{1}{2}$ 的那些小段，

$$\mathrm{P}(X > \tfrac{1}{2} \text{ 及 } N = 4) = \int_{1/2}^1 2x^5\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\Big(1 - \frac{1}{64}\Big) = \frac{1}{3} \cdot \frac{63}{64}.$$

因此

$$\mathrm{P}(X > \tfrac{1}{2} \mid N = 4) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{63}{64}}{\frac{1}{3}} = \frac{63}{64}.$$

另一種看法：給定 $N = 4$，X 的條件密度與 $x^4 \cdot 2x$ 成正比，所以它在 $[0, 1]$ 上是 $6x^5$。它的分佈函數（distribution function）是 x^6，而 $1 - (\frac{1}{2})^6 = \frac{63}{64}$。

驗算

- (ii) 的答案非常接近 1，這是合理的：找到全部提子乾，正是我取了一大塊的有力證據。先驗概率 $\mathrm{P}(X > \frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ 被推高至 $\frac{63}{64} \approx 0.984$。
- $\frac{8}{3}$ 介乎 0 與 4 之間，而且大於 2，這正是應有的結果：密度 $2x$ 偏向較大的份量。
- 以 10^6 次試驗進行蒙地卡羅模擬（Monte Carlo simulation）（取 $X = \sqrt{U}$，其中 U 服從均勻分佈，這樣得出的密度就是 $2x$，然後放置四粒提子乾），得到 $\mathrm{E}(N) \approx 2.667$、$\mathrm{P}(N = 4) \approx 0.333$，以及條件概率 ≈ 0.9846，對比 $\frac{63}{64} = 0.984375$。

常見錯誤

- 忘記求 A，或者取 $A = 1$。這樣 f 就不是密度函數，(i) 的期望值也會算錯（雖然 A 在 (ii) 中會約去）。
- 計算了 $\mathrm{P}(N = 4 \mid X > \frac{1}{2})$，而不是 $\mathrm{P}(X > \frac{1}{2} \mid N = 4)$。條件的方向弄反了。
- 以 $(\frac{1}{2})^4$ 代替積分：份量的大小是隨機的，所以我們必須把 x^4 對密度取平均，而不是代入單一個數值。

STEP 之外

這是貝葉斯推論（Bayesian inference）的縮影：密度 $2x$ 是未知比例的先驗分佈（prior），二項分佈是似然函數（likelihood），而 $6x^5$ 是後驗分佈（posterior）。先驗分佈與後驗分佈都是貝塔分佈（beta distribution），這是二項數據的共軛先驗（conjugate prior）的一個例子，而拉普拉斯（Laplace）的繼起法則（rule of succession）背後也是同一個計算。Blitzstein 與 Hwang 所著的 *Introduction to Probability*（概率論入門）把貝塔–二項分佈的來龍去脈，以及以連續隨機變量為條件的處理方法，講解得十分清楚。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。