詳細解答

STEP III 1999，第 12 題

概率與統計 • 離散聯合分佈

STEP III 1999，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/99-s3-q12

關鍵思路

聯合概率（joint probability）對 j 和 k 的依賴，主要是透過 $j+k$ 而來，所以應按總和 $n=j+k$ 把各項分組。餘下的是 $\sum_j \frac{1}{j!(n-j)!}$，它其實是一個喬裝了的二項式和：乘以 $n!$ 之後就變成 $\sum_j \binom{n}{j} = 2^n$。此後每一部分都是指數級數（exponential series）。

解答

第 (i) 部分

設 $n \geq 1$。事件 $\{X+Y=n\}$ 是事件 $\{X=j,\, Y=n-j\}$（$j=0,1,\ldots,n$）的不相交併集（disjoint union）。在其中每一個事件上都有 $j+k=n$，所以

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X+Y=n) &= \sum_{j=0}^{n} \mathrm{e}^{-1}\frac{n\lambda^n}{j!\,(n-j)!} = \mathrm{e}^{-1}\frac{n\lambda^n}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} \\ &= \mathrm{e}^{-1}\frac{n\lambda^n 2^n}{n!} = \frac{\mathrm{e}^{-1}(2\lambda)^n}{(n-1)!}, \end{aligned}$$

其中用到由二項式定理（binomial theorem）得出的 $\sum_j \binom{n}{j} = (1+1)^n = 2^n$，以及當 $n \geq 1$ 時 $n/n! = 1/(n-1)!$。

為完整起見，由於有因子 $j+k$，$\mathrm{P}(X+Y=0) = \mathrm{P}(X=0,\, Y=0) = 0$。

第 (ii) 部分

概率 $\mathrm{P}(X+Y=n)$ 對所有 $n \geq 0$ 求和，結果必須等於 1。$n=0$ 的一項是零，所以

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-1}(2\lambda)^n}{(n-1)!} = \mathrm{e}^{-1}(2\lambda) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2\lambda)^m}{m!} = \mathrm{e}^{-1}\, 2\lambda\, \mathrm{e}^{2\lambda},$$

這裏我們設 $m = n-1$，並用了指數級數 $\sum_m t^m/m! = \mathrm{e}^t$。因此 $2\lambda\, \mathrm{e}^{2\lambda-1} = 1$，正是所要證明的結果。

第 (iii) 部分

設 $g(x) = 2x\, \mathrm{e}^{2x-1}$。由積法則（product rule），

$$g'(x) = 2\mathrm{e}^{2x-1} + 4x\, \mathrm{e}^{2x-1} = 2(1+2x)\, \mathrm{e}^{2x-1}.$$

當 $x > 0$ 時，$1+2x$ 和 e^{2x-1} 都是正數，所以 $g'(x) > 0$，而 g 在 $x > 0$ 上嚴格遞增（strictly increasing）。

> ? **想一想** 為甚麼「遞增」可以推出「最多只有一個解」？

若 $0 < x_1 < x_2$，則 $g(x_1) < g(x_2)$，所以 g 不可能在兩個不同的點上都取值 1。由於 $\lambda > 0$，第 (ii) 部分得出的方程 $g(\lambda) = 1$ 因此最多只有一個解。

現在試一試那個令指數變成零的明顯候選值 $x = \frac{1}{2}$：$g(\frac{1}{2}) = 1 \cdot \mathrm{e}^0 = 1$。所以 $\frac{1}{2}$ 是一個解，而根據唯一性（uniqueness），它就是唯一的解：

$$\lambda = \tfrac{1}{2}.$$

代入這個值，第 (i) 部分的結果變成：當 $n \geq 1$ 時，$\mathrm{P}(X+Y=n) = \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{(n-1)!}$。

第 (iv) 部分

由於 $X+Y$ 只取 $n \geq 1$ 的值，而其概率剛剛已經求出，

$$\mathrm{E}(2^{X+Y}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{\mathrm{e}^{-1}}{(n-1)!} = 2\mathrm{e}^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m}{m!} = 2\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^2 = 2\mathrm{e},$$

這裏同樣設 $m = n-1$ 並使用指數級數（該級數收斂，所以期望值（expectation）是有限的）。

驗算

- 當 $\lambda = \frac{1}{2}$ 時，第 (i) 部分的公式表明 $X+Y-1$ 服從平均值為 1 的泊松分佈（Poisson distribution）。它的概率 $\mathrm{e}^{-1}/m!$ 之和當然是 1，與第 (ii) 部分一致。

- 以數值方法把 $j+k<60$ 範圍內的聯合概率加起來，總和是 1.000000；把 $2^{j+k}\,\mathrm{P}(X=j, Y=k)$ 加起來則得 5.436564，與 $2\mathrm{e}\approx 5.436564$ 吻合。
- 對第 (iv) 部分作一個簡單的合理性檢查：$2^{X+Y}=2\cdot 2^{N}$，其中 $N\sim\mathrm{Po}(1)$，而對泊松變量有 $\mathrm{E}(s^N)=\mathrm{e}^{s-1}$，所以答案是 $2\mathrm{e}^{1}$。

常見錯誤

- 忘記了 $n/n!=1/(n-1)!$，結果在第 (ii) 部分的級數裏留下一個難以處理的因子 n。
- 把 $n=0$ 的一項當作非零：因子 $j+k$ 令這一項消失，這正是各個求和都由 $n=1$ 開始的原因。
- 在第 (iii) 部分只證明了 $\lambda=\frac{1}{2}$ 可行。你還需要用單調性（monotonicity）排除其他解。

STEP 之外

$\mathrm{E}(s^{X+Y})$ 這個量是 $X+Y$ 的*概率母函數*（*probability generating function*），這裏是在 $s=2$ 處取值。母函數把概率的求和化為冪級數（power series），是大學第一門概率課程中用來辨認分佈和求矩（moments）的標準工具。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（一本概率論入門書）對母函數和泊松分佈有清晰的講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。