詳細解答

STEP III 1999，第 11 題

力學 • 剛體轉動

> **STEP III 1999，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q11

關鍵思路

圓環一旦到達桌邊，便是一個繞固定點轉動的剛體（rigid body），因此兩條方程已足以解決整個問題：能量守恆（conservation of energy）給出任意角度時的角速率（angular speed）；對圓心應用牛頓第二定律（Newton's second law），並沿指向支點的方向分解，則給出法向反作用力（normal reaction）。當這個反作用力降至零時，圓環便失去接觸。第一部分求得的轉動慣量（moment of inertia），正是能量方程所需要的。

解答

轉動慣量

薄圓環上每一個質點與圓心 C 的距離都是 a，所以對於通過 C 並垂直於圓環所在平面的軸，轉動慣量為

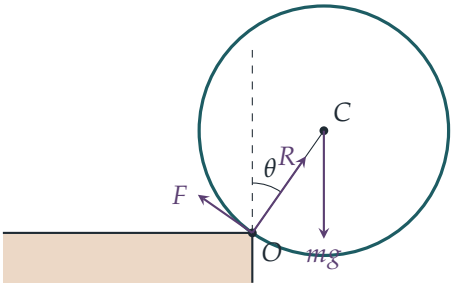
$$I_C = \sum \delta m\, a^2 = ma^2.$$

圓周上的一點 O 與 C 的距離為 a，而新的軸與原來的軸平行，故由平行軸定理（parallel axis theorem）得

$$I_O = I_C + ma^2 = 2ma^2.$$

滾過桌邊

把圓環看成均勻的剛性圓環，並把桌邊看成一個固定點 O。兩個表面都是粗糙的，我們假設摩擦力（friction）足夠大，使圓環始終不打滑：在桌面上它作滾動，越過桌邊時則繞 O 轉動而不滑動。設 θ 為 OC 與向上鉛垂線所成的角，因此圓環到達桌邊的一刻 $\theta = 0$，並記 $\omega = \dot{\theta}$。



想一想 圓環到達桌邊的一瞬間，它繞 O 的角速率是多少？

以速率 v 滾動而不打滑的圓環，角速率為 v/a，而它在每一瞬間的運動都是繞接觸點的轉動。在到達桌邊的一瞬間，接觸點正是 O，圓環只是繼續繞着它轉動：由於圓環沒有失去接觸，所以不會發生碰撞。因此當 $\theta = 0$ 時 $\omega = v/a$。

能量。只要圓環仍與 O 保持接觸，作用於 O 的力便不作功（施力點靜止不動），所以機械能（mechanical energy）守恆。圓心下降了 $a - a\cos\theta$，故

$$\tfrac{1}{2}(2ma^2)\,\omega^2 = \tfrac{1}{2}(2ma^2)\left(\frac{v}{a}\right)^2 + mga(1-\cos\theta), \qquad \text{即} \qquad a\omega^2 = \frac{v^2}{a} + g(1-\cos\theta).$$

指向支點的方向。圓心 C 在以 O 為中心、半徑為 a 的圓上運動，所以它的加速度有一個由 C 指向 O 的分量 $a\omega^2$。作用於圓環的力有：重量 mg、沿 OC 的法向反作用力 R（方向背離 O），以及垂直於 OC 的摩擦力 F，後者沿 OC 沒有分量。沿 CO 方向分解：

$$mg\cos\theta - R = ma\omega^2.$$

代入能量方程，

$$R = mg\cos\theta - \frac{mv^2}{a} - mg(1-\cos\theta) = mg(2\cos\theta - 1) - \frac{mv^2}{a}.$$

這個量隨 θ 增加而減少，而當 R 首次降至零時，圓環便與桌邊失去接觸，此時

$$2g\cos\theta = g + \frac{v^2}{a}, \qquad \text{即} \qquad \cos\theta = \frac{1}{2} + \frac{v^2}{2ag},$$

這正是所要證明的結果。

想一想 這個結果對任何 v 都合理嗎？

當 $\theta = 0$ 時，$R = m(g - v^2/a)$，只有在 $v^2 < ag$ 時才是正數。這就是圓環滾過桌邊而不會立即失去接觸的條件，也是題目所假設的；它同時正是右方小於 1 的條件，所以存在一個有效的角 θ。

為完整起見，沿垂直於 OC 的方向分解，並利用 $I_O\ddot{\theta} = mga\sin\theta$，可得 $\ddot{\theta} = g\sin\theta/(2a)$ 及 $F = \frac{1}{2}mg\sin\theta$。這就是桌邊為防止打滑而必須提供的摩擦力，也說明了為何兩個表面都必須是粗糙的。

驗算

- 若 $v \to 0$，圓環只是從桌邊翻倒下去，並在 $\cos\theta = \frac{1}{2}$ 時失去接觸，即 $\theta = 60°$。當 $v^2 \to ag$ 時，$\theta \to 0$：圓環幾乎沒有碰到桌邊。兩個極限情況都合乎情理。
- 數值上，取 $a = 0.6\,\mathrm{m}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ 及 $v = 1.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$，由 $\dot\theta = v/a$ 開始對 $\ddot\theta = g\sin\theta/(2a)$ 逐步計算，直至 $g\cos\theta = a\dot\theta^2$ 為止，得 $\cos\theta \approx 0.69132$，與 $\frac{1}{2} + v^2/(2ag) = 0.69133$ 吻合。

常見錯誤

- 在能量方程中使用 $I_C = ma^2$，或在 $\frac{1}{2}I_O\omega^2$ 之上另加一項平移動能（translational kinetic energy）。繞 O 的轉動已經包含了圓心的運動。
- 忘記了初始動能，結果對任何 v 都得出 $\cos\theta = \frac{1}{2}$。

STEP 之外

從桌邊滾落是典型的單側約束（unilateral constraint）：桌邊只能推而不能拉，所以運動方程只在它們所預測的反作用力非負時才適用。質點從球面滑落，以及汽車駛過拱橋，都受同一個想法支配。在大學一年級的課程中，你會在學習剛體動力學（rigid-body dynamics）以及平行軸定理和垂直軸定理（perpendicular axis theorem）時遇到它。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對這些課題都有細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。