詳細解答

STEP III 1999，第 10 題

力學 • 下落鏈條的衝量

> **STEP III 1999，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q10

關鍵思路

鏈條塌落期間，仍然懸在空中的部分處於自由落體（free fall）狀態：除了重力之外，沒有任何力拉着它。因此每個鏈環只是從原來的位置直接落下，各鏈環之間唯一的分別就是下落的高度。桌面對每個鏈環各施加一個衝量（impulse），使它停下。把這些衝量加起來，得到一個平方根之和；當 n 很大時，這就是 $\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ 的黎曼和（Riemann sum）。

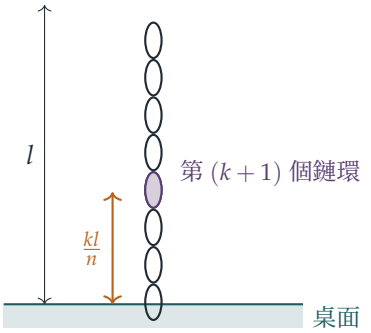
解答

模型

每個鏈環的質量為 $\frac{m}{n}$，長度為 $\frac{l}{n}$。鏈環是光滑（smooth）的，而鏈條完全柔軟，所以它不能傳遞推力。我們把每個鏈環看作一個質點（particle），它到達桌面時會即時靜止（碰撞屬非彈性（inelastic））。

> ? **想一想** 下方的鏈環正被桌面截停，為甚麼鏈條懸空的部分仍然是自由落體？

鏈條釋放後，若沒有張力（tension），每個鏈環的加速度都是 g；而張力為零的下落鏈條並無矛盾：所有鏈環一起運動，彼此保持接觸而不被拉長。桌面把鏈環向上推，使它停下，但柔軟的鏈條無法把這個推力傳給上方的鏈環。由於鏈環光滑，它們之間也沒有摩擦力。因此，仍在空中的鏈環除了重力之外不受任何其他力的作用，每個鏈環都自由下落，直至着地為止。



第 $(k+1)$ 個鏈環

第 $(k+1)$ 個鏈環下方有 k 個鏈環，總長度為 $\frac{kl}{n}$。由於鏈條底端剛好觸及桌面，第 $(k+1)$ 個鏈環要下落 $\frac{kl}{n}$ 的距離才到達桌面。它由靜止開始自由下落，到達時的速率由 $v^2 = 2gs$ 給出：

$$v_k = \sqrt{\frac{2gkl}{n}}.$$

其後它被截停，所以它的動量（momentum）變化的大小為

$$\frac{m}{n}\sqrt{\frac{2gkl}{n}} = \frac{m}{n}\sqrt{2gl}\,\sqrt{\frac{k}{n}},$$

方向向上（鏈環失去了向下的動量 $\frac{m}{n}v_k$）。當 $k = 0$ 時，這個值為零：最底的鏈環本來就已經接觸桌面。

總衝量

根據牛頓第三定律（Newton's third law），桌面從第 $(k+1)$ 個鏈環所受的衝量，大小等於該鏈環的動量變化，方向向下。鏈環的編號為 $k+1 = 1, 2, \ldots, n$，所以桌面因碰撞而承受的總衝量為

$$J = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{m}{n}\sqrt{\frac{2gkl}{n}} = m\sqrt{2gl}\ \cdot\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}}.$$

? **想一想** $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{k/n}$ 近似於哪一個積分？

把 $[0,1]$ 分成多個長條，這個和就是 n 個闊度為 $\frac{1}{n}$ 的長方形的面積之和，各長方形的高度是 $\sqrt{x}$ 在長條左端點 $x = 0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$ 的值。所以當 n 很大時，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}} \approx \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3},$$

因此

$$J \approx \tfrac{2}{3}\,m\sqrt{2gl},$$

這正是所求的結果。

再看看這個近似有多準確：$\sqrt{x}$ 是遞增函數，所以在長條 $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ 上，左端點的高度 $\sqrt{k/n}$ 位於曲線之下，而在 $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ 上則位於曲線之上。對所有長條求和，得

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \;\le\; \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}} \;\le\; \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x, \quad \text{即} \quad \tfrac{2}{3}\Big(1-\tfrac{1}{n}\Big)^{3/2} \le \frac{J}{m\sqrt{2gl}} \le \tfrac{2}{3}.$$

上下界都趨向 $\frac{2}{3}$，所以相對誤差（relative error）最多約為 $\frac{3}{2n}$。

驗算

- 單位：$m\sqrt{gl}$ 是質量 × 速率，即動量，衝量的單位正應如此。
- 數值上，取 $m = 2$、$l = 3$、$g = 9.8$：$\frac{2}{3}m\sqrt{2gl} \approx 10.224$，而精確的和在 $n = 10$ 時為 9.363，$n = 100$ 時為 10.144，$n = 1000$ 時為 10.216。兩者之比趨近 1，而且始終落在上述的上下界之內。
- 最後着地的鏈環幾乎下落了整個長度 l，速率接近 $\sqrt{2gl}$。假如全部質量都以這個速率到達，衝量便是 $m\sqrt{2gl}$。大部分鏈環下落的距離都較短，所以答案是這個值的某個分數，十分合理。

常見錯誤

- 以為第 $(k+1)$ 個鏈環下落的距離是 $\frac{(k+1)l}{n}$。它下方其實只有 k 個鏈環。
- 把已經躺在桌面上的那段鏈條的穩定重量也計算在內。題目只問碰撞所產生的衝量。

STEP 之外

由於所有鏈環在 $\sqrt{2l/g}$ 的時間內全部着地，單是碰撞便對桌面施加了 $\frac{2}{3}m\sqrt{2gl}\big/\sqrt{2l/g} = \frac{2}{3}mg$ 的平均力。事實上，在每一刻，撞擊力都是已落在桌面上那段鏈條的重量的兩倍，所以放在桌下的磅秤，讀數會在最後一個鏈環着地的一刻升至 $3mg$。這類質量連續增加或減少的問題（下落的鏈條、火箭、雨點），要用牛頓第二定律（Newton's second law）的變質量（variable-mass）形式來處理。詳細而嚴謹的論述可參閱 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教材）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。