詳細解答

STEP III 1999，第 1 題

純數學 • 三次方程的根

> **STEP III 1999，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q1

關鍵思路

這裏的一切都源自韋達定理（Vieta's formulas）：對於三次方程（cubic）$x^3 - px^2 + qx - r = 0$，設其根（roots）為 α, β, γ，則

$$\alpha + \beta + \gamma = p, \qquad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q, \qquad \alpha\beta\gamma = r.$$

等比數列（geometric progression）是以乘法的方式圍繞中間項對稱的，所以根之積 r 和比值 q/p 能把中間的根找出來。等差數列（arithmetic progression）則是以加法的方式圍繞中間項對稱的，所以改由根之和 p 把中間的根找出來。

解答

第 (i) 部分

設三個根為 a/k、a 和 ak。要使 a/k 有意義，必須有 $k \neq 0$；又因為根之積為 $r \neq 0$，所以亦有 $a \neq 0$。由韋達定理得

$$\begin{aligned} p &= \frac{a}{k} + a + ak = a\left(\frac{1}{k} + 1 + k\right), \\ q &= \frac{a}{k} \cdot a + a \cdot ak + \frac{a}{k} \cdot ak = a^2\left(\frac{1}{k} + 1 + k\right), \\ r &= \frac{a}{k} \cdot a \cdot ak = a^3. \end{aligned}$$

p 和 q 中出現了同一個括號。由於 $p \neq 0$，這個括號不等於零，所以可以相除：

$$\frac{q}{p} = a.$$

因此 q/p 是其中一個根（即中間的那個）。於是 $q = ap$，從而

$$q^3 = a^3p^3 = rp^3, \qquad \text{即} \qquad q^3 - rp^3 = 0,$$

這正是所要證明的。

第 (ii) 部分

現在假設 $r = q^3/p^3$，並記 $a = q/p$，於是 $r = a^3$。把 $x = a$ 代入三次方程，並利用 $p\,a^2 = q^2/p = q\,a$，得

$$a^3 - pa^2 + qa - r = a^3 - qa + qa - a^3 = 0,$$

所以 q/p 是一個根。

由於 $r \neq 0$，可知 $q \neq 0$，因此 $a \neq 0$。把另外兩個根稱為 β 和 γ。三個根之積為 r，所以

$$a\beta\gamma = r = a^3 \quad \Longrightarrow \quad \beta\gamma = a^2 = \left(\frac{q}{p}\right)^2,$$

這裏兩邊除以了 $a \neq 0$。

> ? **想一想** 怎樣把 $\beta\gamma = a^2$ 化成 a/k、a、ak 的形式？

我們需要選定 k。由於 $\beta\gamma = a^2 \neq 0$，β 和 γ 都不是零。定義 $k = \gamma/a$，於是 $\gamma = ak$ 且 $k \neq 0$。那麼

$$\beta = \frac{a^2}{\gamma} = \frac{a^2}{ak} = \frac{a}{k}.$$

所以三個根是 a/k、a 和 ak，每一個都是由前一個乘以 k 而得。它們成等比數列。（當 β 和 γ 不是實數時，公比 k 可能是複數。這個論證並不要求它們是實數。）

綜合第 (i) 和第 (ii) 部分可知：當 $p \neq 0$ 且 $r \neq 0$ 時，三個根成等比數列，當且僅當（if and only if）$q^3 = rp^3$。

第 (iii) 部分

必要性。設三個根為 $b - d$、b 和 $b + d$。它們的和是 $3b = p$，所以中間的根是 $b = p/3$。把 $x = p/3$ 代入三次方程，再乘以 27：

$$p^3 - 3p^3 + 9pq - 27r = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2p^3 - 9pq + 27r = 0.$$

充分性。反過來，假設 $2p^3 - 9pq + 27r = 0$。把上面的步驟倒過來，可知 $p/3$ 是一個根。於是另外兩個根之和為 $p - p/3 = 2p/3$，所以可以把它們寫成 $p/3 - d$ 和 $p/3 + d$，其中 d 是某個數（可能是複數）。三個根 $p/3 - d$、$p/3$、$p/3 + d$ 成等差數列。

因此，充分必要條件（necessary and sufficient condition）是

$$\boxed{2p^3 - 9pq + 27r = 0}.$$

驗算

- 根為 $1, 2, 4$（等比數列）時，$p = 7$，$q = 14$，$r = 8$。這時 $q/p = 2$ 正是中間的根，而且 $q^3 = 2744 = 8 \cdot 343 = rp^3$。
- 根為 $1, 2, 3$（等差數列）時，$p = 6$，$q = 11$，$r = 6$，而 $2 \cdot 216 - 9 \cdot 66 + 27 \cdot 6 = 432 - 594 + 162 = 0$。等比數列 $1, 2, 4$ 則給出 $686 - 882 + 216 = 20 \neq 0$，這也合乎預期。
- 我們亦用數千個隨機三次方程（包括有複數根的）對全部三個部分作了數值檢驗。所有結果都在 10^{-11} 的誤差範圍內吻合。

常見錯誤

- 除以 $1/k + 1 + k$ 卻沒有說明它為何不等於零。它不等於零，是因為它等於 p/a，而 $p \neq 0$。
- 在第 (ii) 部分，只證明了 q/p 是一個根以及 $\beta\gamma = (q/p)^2$，然後沒有具體寫出公比（common ratio），就斷言三個根成等比數列。
- 在第 (iii) 部分，只證明了一個方向。「充分必要」需要兩個方向都證明。

STEP 之外

韋達定理說明，多項式的係數就是其根的基本對稱函數（elementary symmetric functions）。有一個經典定理指出，根的每一個對稱多項式（symmetric polynomial）都可以用這些基本對稱函數表示出來。這正是伽羅瓦理論（Galois theory）的起點，該理論解釋了多項式的根在甚麼情況下可以用根式（radicals）求出。順帶一提，代換 $x = y + p/3$ 可以消去三次方程中的 x^2 項，而所得的缺項三次方程（depressed cubic）的常數項是 $2p^3 - 9pq + 27r$ 的倍數。想知道這些想法會通往何處，Allenby 的 *Rings, Fields and Groups* 是個很好的入門讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。