詳細解答

STEP II 1999，第 9 題

力學 • 變力作用下的運動

> **STEP II 1999，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q9

關鍵思路

加速度（acceleration）只取決於距離 x，與時間無關，所以最合適的工具是 $\ddot{x} = v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$。這樣一來，運動方程（equation of motion）就變成一條可以直接積分的方程，從而得出 v^2 作為 x 的函數（其實就是一條喬裝了的能量方程（energy equation））。餘下的工作，都是在問 v^2 在哪裏降至零：碎片就是在那裏停下，然後掉頭返回。

解答

我們把每塊碎片看成一個質點（particle），沿着一條通過定點 G 的直線運動，以 x 表示它與 G 的距離，$v = \dot{x}$ 表示它的速度，並規定遠離 G 的方向為正。起初 $x = 0$ 而 $v = u > 0$。由於加速度指向 G，在這個規定下它是負的。

第 (i) 部分

當 $x < R$ 時，$\ddot{x} = -k_1 x^3$，寫成 $\ddot{x} = v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 便得

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -k_1 x^3.$$

分離變數，並由起點（$x = 0$，$v = u$）開始積分：

$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}u^2 = -\tfrac{1}{4}k_1 x^4, \qquad \text{所以} \qquad v^2 = u^2 - \tfrac{1}{2}k_1 x^4 \quad (x < R).$$

只要碎片仍在向外運動，便有 $v = \sqrt{u^2 - \tfrac{1}{2}k_1 x^4}$。

第 (ii) 部分

由於 $2a^2 = k_1R^4$，(i) 的公式可寫成 $v^2 = u^2 - a^2(x/R)^4$。當 x 由 0 開始增加時，v^2 隨之遞減，並在

$$x_0 = \left(\frac{2u^2}{k_1}\right)^{1/4}.$$

處降至零。若 $u < a$，則 $2u^2 < 2a^2 = k_1R^4$，所以 $x_0 < R$。

想一想 在 x_0 處速率為零，但為甚麼這就表示碎片不會走得更遠？

在 x_0 處，碎片瞬間靜止，但它在該處的加速度是 $-k_1x_0^3 \neq 0$，方向指向 G。所以它並非處於平衡（equilibrium）狀態：它會開始向 G 往回運動。事實上，x 根本不可能超過 x_0，因為那樣的話 (i) 的公式便會給出 $v^2 < 0$。碎片最遠只能到達 $x_0 < R$，所以它永遠不會到達與 G 相距 R 之處，這正是所要證明的。

第 (iii) 部分

首先，$u \geq b$ 的碎片必定能到達 R。根據定義，

$$b^2 = \tfrac{1}{2}k_1R^4 + \frac{2k_2}{3R^3} = a^2 + \frac{2k_2}{3R^3} > a^2,$$

所以當 $x \leq R$ 時，由第 (i) 部分得

$$v^2 = u^2 - \tfrac{1}{2}k_1x^4 \geq u^2 - a^2 \geq b^2 - a^2 = \frac{2k_2}{3R^3} > 0.$$

特別地，碎片到達 $x = R$ 時，$v_R^2 = u^2 - \frac{1}{2}k_1R^4 = u^2 - a^2$。

當 $x \geq R$ 時，運動方程是 $v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -k_2x^{-4}$。由 $x = R$ 開始積分：

$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v_R^2 = \frac{k_2}{3}\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{R^3}\right),$$

所以

$$\begin{aligned} v^2 &= u^2 - \tfrac{1}{2}k_1R^4 - \frac{2k_2}{3R^3} + \frac{2k_2}{3x^3} \\ &= u^2 - b^2 + \frac{2k_2}{3x^3} \qquad (x \geq R). \end{aligned}$$

這個組合正好說明了 b 為何要這樣定義：b^2 就是由 G 逃逸到無窮遠處，以 $\frac{1}{2}v^2$ 計算所須付出的總「代價」。

若 $u \geq b$，則 $u^2 - b^2 \geq 0$ 而 $\frac{2k_2}{3x^3} > 0$，所以對每一個 $x \geq R$ 都有 $v^2 > 0$（這包括臨界情況 $u = b$）。連同 $x \leq R$ 時的下界，可知在碎片可能到達的每一個距離上，v^2 都嚴格為正。

速度 v 對時間連續，而且起初為 $u > 0$。它要變成負數，就必須經過 0，即在某個位置上有 $v^2 = 0$，而我們剛剛證明了這不會發生。所以自始至終 $v > 0$：由爆炸的一刻起，碎片一直在遠離 G。（由於 $v^2 \geq 2k_2/(3x^3)$，它會一直走下去，且 $x \to \infty$。）

第 (iv) 部分

現在 $a < u < b$。由於 $u > a$，(iii) 的論證表明在 $[0, R]$ 上 $v^2 \geq u^2 - a^2 > 0$，所以碎片到達 R 時仍在向外運動。越過 R 之後，

$$v^2 = \frac{2k_2}{3x^3} - (b^2 - u^2),$$

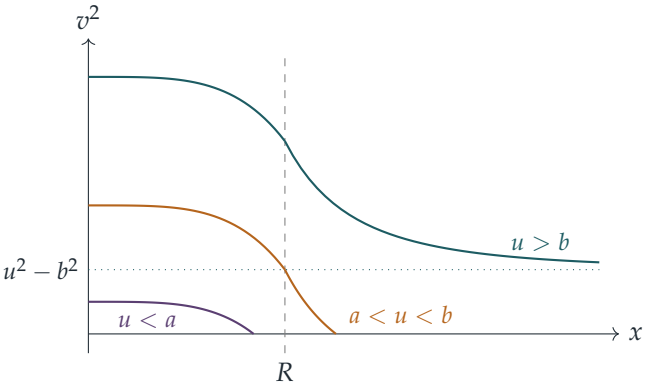
而此時 $b^2 - u^2 > 0$。這個式子隨 x 增加而遞減，並在

$$x^3 = \frac{2k_2}{3(b^2 - u^2)}.$$

時等於零。這一點確實位於 $x \geq R$ 的區域內：由於 $u > a$，$b^2 - u^2 < b^2 - a^2 = \frac{2k_2}{3R^3}$，所以 $x^3 > R^3$。與 (ii) 一樣，碎片在該處停下，但仍有指向 G 的非零加速度 $-k_2 x^{-4}$，而且它不可能走得更遠，否則 v^2 便會是負數。與 G 的最大距離是

$$\boxed{x_{\max} = \left(\frac{2k_2}{3(b^2 - u^2)}\right)^{1/3}}$$

下圖顯示當 $k_1 = 2$、$k_2 = 3$、$R = 1$（因此 $a^2 = 1$、$b^2 = 3$）時，三類初速率下 v^2 對 x 的圖像。每塊碎片都會一直前進，直至它的曲線與橫軸相交為止。



驗算

- 取 $k_1 = 2$、$k_2 = 3$、$R = 1$，得 $a = 1$、$b = \sqrt{3}$；當 $u = \sqrt{2}$ 時，公式給出 $x_{\max} = (2 \cdot 3/(3 \cdot 1))^{1/3} = 2^{1/3} \approx 1.26$，剛好超過 R，與預期相符。

- 當 $u \to a^+$ 時，$b^2 - u^2 \to 2k_2/(3R^3)$ 而 $x_{\max} \to R$；當 $u \to b^-$ 時，$x_{\max} \to \infty$。兩者在邊界上都與第 (ii) 和第 (iii) 部分吻合。
- 以數值方法逐步計算這個運動（龍格－庫塔法（Runge–Kutta），隨機選取十二組 k_1、k_2、R），結果重現了 v^2 的公式、$u < a$ 時的折返點 $(2u^2/k_1)^{1/4}$、(iv) 中 $x_{\max}$ 的值（誤差在 0.1% 以內），以及 $u \geq b$ 時完全沒有折返。

常見錯誤

- 第二階段由 $x = 0$ 開始積分，而不是由 $x = R$ 並以 $v_R^2 = u^2 - \frac{1}{2}k_1R^4$ 開始：力的規律在 R 處改變，所以積分常數也隨之改變。
- 弄丟正負號：加速度指向 G，所以 $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ 是 負的 k_1x^3 或 k_2x^{-4}。
- 在 (iii) 中只檢查 $x \geq R$，卻忘記在 R 以內 v 也必須保持為正。

STEP 之外

設 $V'(x)$ 等於加速度的相反數，則對任何只取決於位置的力，$\frac{1}{2}v^2 + V(x)$ 這個量都是守恆的。畫出 V 的圖像（一個「勢阱」（potential well）），便可一眼看出哪些運動是有界的、哪些會逃逸，而 b 不過是這個勢阱的逃逸速率（escape speed）。同樣的推理可得出真實重力下的逃逸速度，也是對非線性振子（nonlinear oscillator）作相平面分析（phase-plane analysis）的起點。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics* 詳細闡述了這類能量圖。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。