詳細解答

STEP II 1999，第 8 題

純數學 • 三角級數

> **STEP II 1999，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q8

關鍵思路

把 $\sin k\theta$ 乘以 $2\sin\frac{1}{2}\theta$，利用積化和差公式（product-to-sum formula）便可將它化成兩個餘弦之*差*，於是整個和式可以裂項相消（telescope）。之後兩部分的關鍵都在於選取合適的 θ：取 $\theta = \pi/n$ 時，那個難纏的餘弦 $\cos(n+\frac{1}{2})\theta$ 會變成 $\cos\frac{1}{2}\theta$ 的簡單倍數。至於 (ii)，半角公式（half-angle formula）可把 $\sin^2$ 化為餘弦，而和式 $\sum k\cos k\theta$ 正好就是對 $(*)$ 求導所得的結果。

解答

證明 $(*)$

假設 $\sin\frac{1}{2}\theta \neq 0$，使右邊有意義。在恆等式（identity）$2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$ 中取 $A = k\theta$ 及 $B = \frac{1}{2}\theta$，得

$$2\sin\tfrac{1}{2}\theta\,\sin k\theta = \cos\left(k-\tfrac{1}{2}\right)\theta - \cos\left(k+\tfrac{1}{2}\right)\theta.$$

由 $k = 0$ 加至 n，第 k 行所減去的 $\cos(k+\frac{1}{2})\theta$ 會在第 $k+1$ 行加回來，因此只剩下首項和末項：

$$2\sin\tfrac{1}{2}\theta\sum_{k=0}^{n}\sin k\theta = \cos\left(-\tfrac{1}{2}\theta\right) - \cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\theta = \cos\tfrac{1}{2}\theta - \cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\theta,$$

因為餘弦是偶函數（even function）。兩邊除以 $2\sin\frac{1}{2}\theta$ 即得 $(*)$。

第 (i) 部分

取 $\theta = \pi/n$（其中 $n \geq 1$），則 $\sin\frac{1}{2}\theta = \sin\frac{\pi}{2n} \neq 0$。於是

$$\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\theta = \cos\left(\pi + \tfrac{\pi}{2n}\right) = -\cos\tfrac{\pi}{2n},$$

所以 $(*)$ 的分子是 $2\cos\frac{\pi}{2n}$，而

$$\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{2\cos\frac{\pi}{2n}}{2\sin\frac{\pi}{2n}} = \cot\frac{\pi}{2n}.$$

這是精確的結果。當 n 很大時，$\frac{\pi}{2n}$ 很小，故 $\cos\frac{\pi}{2n} \approx 1$ 而 $\sin\frac{\pi}{2n} \approx \frac{\pi}{2n}$，由此得

$$\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \approx \frac{1}{\pi/(2n)} = \frac{2n}{\pi}.$$

第 (ii) 部分

由倍角公式（double-angle formula），$\sin^2\frac{k\pi}{2n} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{k\pi}{n}\right)$，所以取 $\theta = \pi/n$ 時

$$\sum_{k=0}^{n} k\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k\cos k\theta = \frac{n(n+1)}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k\cos k\theta. \qquad (1)$$

要求出 $\sum k\cos k\theta$，我們把 $(*)$ 對 θ 求導；左邊正好變成這個和式。先把右邊拆成

$$\frac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}\theta - \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}.$$

記 $S = \sin\frac{1}{2}\theta$ 及 $c = \cos\frac{1}{2}\theta$。第一部分求導後得 $-\frac{1}{4}\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}\theta = -\frac{1}{4S^2}$。根據商法則（quotient rule），第二部分求導後得

$$\frac{(n+\frac{1}{2})\sin(n+\frac{1}{2})\theta \cdot 2S + \cos(n+\frac{1}{2})\theta \cdot c}{4S^2}.$$

因此

$$\sum_{k=0}^{n} k\cos k\theta = \frac{-1 + (2n+1)S\sin(n+\frac{1}{2})\theta + c\cos(n+\frac{1}{2})\theta}{4S^2}.$$

想一想 為甚麼要在求導之後才代入 $\theta = \pi/n$，而不是之前？

恆等式 $(*)$ 對所有 θ（只要 $\sin\frac{1}{2}\theta \neq 0$）都成立，所以我們可以對它求導。假如先固定 $\theta = \pi/n$，得到的只是一個數，根本無從求導。一旦得到以 θ 表示的導數恆等式，我們便可以代入任何想要的值。

現在取 $\theta = \pi/n$。與 (i) 一樣，$(n+\frac{1}{2})\theta = \pi + \frac{1}{2}\theta$，所以 $\sin(n+\frac{1}{2})\theta = -S$ 而 $\cos(n+\frac{1}{2})\theta = -c$。因此

$$\sum_{k=0}^{n} k\cos\frac{k\pi}{n} = \frac{-1-(2n+1)S^2 - c^2}{4S^2} = \frac{-2-2nS^2}{4S^2} = -\frac{1}{2S^2} - \frac{n}{2},$$

其中用了 $c^2 = 1 - S^2$。代入 (1)：

$$\sum_{k=0}^{n} k\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{n(n+1)}{4} + \frac{n}{4} + \frac{1}{4S^2} = \frac{n(n+2)}{4} + \frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{2n}}.$$

這是精確的結果。當 n 很大時，$\sin\frac{\pi}{2n} \approx \frac{\pi}{2n}$，故 $\frac{1}{4\sin^2(\pi/2n)} \approx \frac{n^2}{\pi^2}$；而 $\frac{n(n+2)}{4} = \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2}$，其中第二項與 n^2 相比可以忽略。所以

$$\sum_{k=0}^{n} k\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \approx \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}\right) n^2,$$

正如題目所求。

驗算

- 在 (ii) 中取 $n = 1$：和為 $0 + 1\cdot\sin^2\frac{\pi}{2} = 1$，而精確公式給出 $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$。
- 在 (i) 中取 $n = 2$：和為 $0 + 1 + 0 = 1$，而 $\cot\frac{\pi}{4} = 1$。
- 數值上，當 $n = 1000$ 時，(i) 的和是 $636.6192\ldots$，而 $2n/\pi = 636.6198\ldots$；(ii) 的和是 $351\,821.3$，與 $(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2})n^2$ 相差不超過 0.15%。(ii) 的相對誤差（relative error）以 $1/n$ 的速度縮小，原因是略去了 $\frac{n}{2}$ 這一項。

常見錯誤

- 寫成 $\cos(\pi + x) = \cos x$：正確的值是 $-\cos x$，而正是這個負號令 (i) 的分子變成兩倍。
- 在 (ii) 中漏掉 $\frac{1}{2}\sum k = \frac{n(n+1)}{4}$ 這一項，而 $\frac{1}{4}n^2$ 正是由它而來。

STEP 之外

第 (i) 部分其實是喬裝了的黎曼和（Riemann sum）：$\frac{\pi}{n}\sum\sin\frac{k\pi}{n} \to \int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x = 2$，這正正就是 $\sum \approx 2n/\pi$ 的意思。同樣地，(ii) 所說的是 $\frac{1}{n^2}\sum k\sin^2\frac{k\pi}{2n} \to \int_0^1 x\sin^2\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}$。把同一個裂項技巧用於 $\sum\cos k\theta$，便會得到傅立葉分析（Fourier analysis）中的狄利克雷核（Dirichlet kernel）。Abbott 的 *Understanding Analysis*（數學分析入門教材）對黎曼和與傅立葉級數（Fourier series）有嚴謹的討論。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。