詳細解答

STEP II 1999，第 7 題

純數學 • 曲線描繪

STEP II 1999，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/99-s2-q7

關鍵思路

先求導，再把所有項通分到同一個公分母上：分子幾乎完全消去——所有二次項互相抵消，只剩下一個一次因式，駐點（stationary point）的位置隨即確定。至於描繪曲線，則把根號內的式子配方（complete the square）。這樣便知道曲線在哪裏有定義、當 $|x|$ 很大時有何表現，以及當 $a = 1$ 時平方根會變成絕對值（modulus），令曲線變成兩段等軸雙曲線（rectangular hyperbola）。

解答

設 $Q(x) = x^2 - 2x + a = (x-1)^2 + (a-1)$。

當 $a > 1$ 時恰有一個駐點

若 $a > 1$，則對任意 x 均有 $Q(x) \geq a - 1 > 0$，所以曲線對所有實數 x 都有定義，而且可導。由 $y = xQ^{-1/2}$ 及 $Q'(x) = 2x - 2$，用乘積法則（product rule）可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= Q^{-1/2} - \tfrac{1}{2}x(2x-2)Q^{-3/2} = \frac{Q - x(x-1)}{Q^{3/2}} \\ &= \frac{x^2 - 2x + a - x^2 + x}{Q^{3/2}} = \frac{a - x}{(x^2 - 2x + a)^{3/2}}.\end{aligned}$$

對任意 x，分母都是正數而且有限，所以 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$ 當且僅當 $x = a$。因此 C 恰有一個駐點，位於

$$x = a, \qquad y = \frac{a}{\sqrt{a^2 - a}} = \sqrt{\frac{a}{a-1}},$$

正如題目所求。由於 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 的正負號與 $a-x$ 相同，曲線在 $x<a$ 時上升，在 $x>a$ 時下降，所以這一點是極大點（maximum）。

想一想 條件 $a>1$ 用在哪裏？

用了兩次：其一，它保證 $Q>0$ 處處成立，所以曲線沒有缺口，也沒有導數不存在的點；其二，它保證 $x=a$ 確實是曲線上的一點，因為 $Q(a)=a^2-a>0$。當 $a=1$ 時，原本應是駐點的 $x=a=1$ 正好是 $Q=0$ 之處，第 (ii) 部分出問題的地方就在這裏。

另外有兩項事實對描繪兩條曲線都有幫助。當 $|x|$ 很大時，$\sqrt{Q}=|x|\sqrt{1-2/x+a/x^2}\approx|x|$，所以

$$y\to 1 \text{ 當} x\to+\infty, \qquad y\to -1 \text{ 當} x\to-\infty.$$

此外，y 的正負號與 x 相同，而且曲線通過原點，在該處的斜率（gradient）為 $a/a^{3/2}=1/\sqrt{a}$。

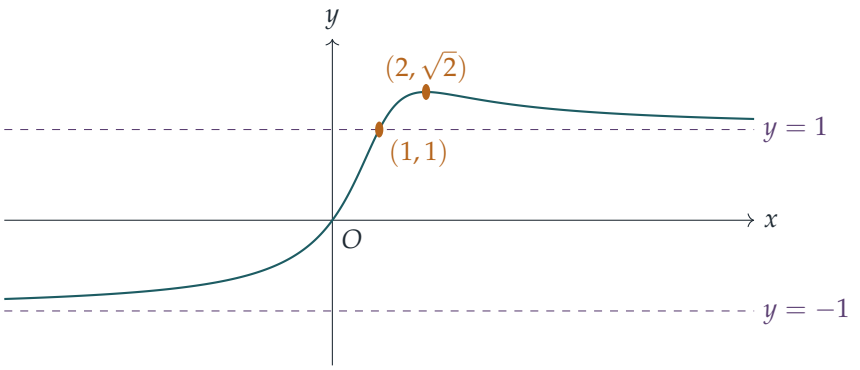
第 (i) 部分：$a=2$

這時 $y=\dfrac{x}{\sqrt{(x-1)^2+1}}$，對所有 x 都有定義，並且

- 在 $(2,\sqrt{2})$ 有極大點，在 $x<2$ 時遞增，在 $x>2$ 時遞減；
- 原點在曲線上，該處的斜率為 $1/\sqrt{2}$；
- 有水平漸近線（asymptote）$y=1$（當 $x\to\infty$）和 $y=-1$（當 $x\to-\infty$）。

曲線在每條漸近線的哪一側？設 $y=\pm1$ 並把兩邊平方，得 $x^2=x^2-2x+2$，所以 $x=1$，而且只有 $y=+1$ 符合（因為 y 的正負號與 x 相同）。因此曲線與 $y=1$ 只相交一次，交點為 $(1,1)$：對所有 $x>1$，曲線都在 $y=1$ 之上，過了極大點之後從上方向漸近線下降。曲線永不與 $y=-1$ 相交，所以它一直在 $y=-1$ 之上，並隨着 x 由 $-\infty$ 增大而上升，逐漸離開這條漸近線。

（如果想知道更多細節：再求導一次可得 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2=(2x^2-7x+4)/Q^{5/2}$，所以拐點（point of inflection）位於 $x=\frac{1}{4}(7\pm\sqrt{17})$，大約是 $x\approx0.72$ 和 $x\approx2.78$。描繪草圖時用不着這些，但它們可以解釋曲線的形狀。）



第 (ii) 部分：$a = 1$

這時 $Q = (x-1)^2$，所以要排除 $x = 1$，而且由於平方根取正值，

$$\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|.$$

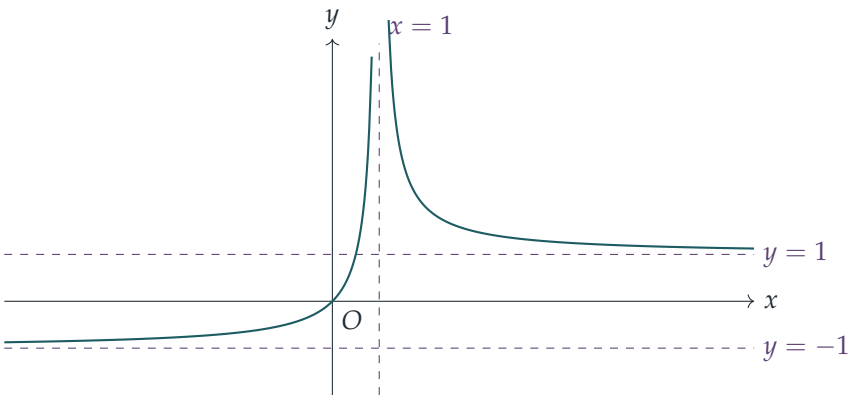
因此

$$y = \frac{x}{|x-1|} = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} = -1 + \dfrac{1}{1-x}, & x < 1, \\ \dfrac{x}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x-1}, & x > 1. \end{cases}$$

每一支都是以 $x = 1$ 為中心的等軸雙曲線的一部分。

- 當 $x < 1$：y 遞增（其導數為 $1/(1-x)^2 > 0$），由 -1（當 $x \to -\infty$ 時從上方趨近）出發，以斜率 1 通過原點，再在 $x \to 1^-$ 時趨向 $+\infty$。
- 當 $x > 1$：y 遞減（導數為 $-1/(x-1)^2 < 0$），由 $x \to 1^+$ 時的 $+\infty$ 下降，趨向 1（當 $x \to \infty$ 時從上方趨近）。

直線 $x = 1$ 是鉛垂漸近線，而且在兩側都有 $y \to +\infty$（分子接近 1，分母是很小的正數）。曲線沒有駐點：$a > 1$ 的曲線的極大點高度為 $\sqrt{a/(a-1)}$，當 $a \to 1^+$ 時，這個極大點已被推到無窮遠處。一般公式亦與此吻合，因為 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = (1-x)/|x-1|^3$ 永不為零。



驗算

- 以數值方法檢驗：在數千個隨機點上，導數公式 $(a-x)/Q^{3/2}$ 與有限差分（finite difference）求得的導數吻合；而對若干個 $a>1$ 的值逐點檢查正負號，都恰好找到一次變號。
- 當 $a=2$：$y(2)=2/\sqrt{2}=\sqrt{2}\approx 1.414$，$y(1)=1$，而 $y(10^6)\approx 1.000001$，$y(-10^6)\approx -0.999999$，證實了曲線從哪一側趨近各漸近線。
- 當 $a=1$：$y(0.999)\approx 999$ 及 $y(1.001)\approx 1001$，兩者都是很大的正數，與上文所述一致。
- 當 $a\to\infty$ 時，極大點的高度 $\sqrt{a/(a-1)}$ 趨向 1，這是合理的：當 a 極大時，曲線在原點附近近似於 $x/\sqrt{a}$，隆起的部分隨之變得平坦。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分寫成 $\sqrt{(x-1)^2}=x-1$。這樣會處處得到 $y=x/(x-1)$，左邊的一支因而出錯：它會在 $x\to-\infty$ 時趨向 $+1$，並在 $x\to 1^-$ 時趨向 $-\infty$。
- 把曲線兩端的漸近線都當作 $y=1$：由於 $\sqrt{x^2}=|x|$，當 $x\to-\infty$ 時極限是 -1。
- 忘記說明當 $a>1$ 時分母永不為零；缺少這一步，「分子只在 $x=a$ 處為零」尚不足以證明恰有一個駐點。

STEP 之外

這個曲線族的性質在 $a=1$ 處突然改變：一條只有一個極大點的光滑曲線，變成了兩支分離的曲線，並帶有一條鉛垂漸近線。研究一個曲線族的定性形狀如何隨參數而變，正

是分歧理論（bifurcation theory）的起點；而處理 $\sqrt{x^2} = |x|$ 以及 $x \to \pm\infty$ 時的極限所需的那份謹慎，正是大學一年級分析課要嚴格闡明的。Abbott 的 *Understanding Analysis* 平易近人，很適合用來了解極限與連續性的嚴謹處理方法。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。