詳細解答

STEP II 1999，第 6 題

純數學 • 代換積分法

> **STEP II 1999，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q6

關鍵思路

分式 $\frac{ax+b}{cx+d}$ 的導數（derivative）是一個常數除以 $(cx+d)^2$。因此，只要被積函數（integrand）是 $\frac{1}{(x+3)^2}$ 乘以 $\frac{x+1}{x+3}$ 或 $\frac{x+2}{x+3}$ 的函數，把該分式代換為新變數，就能把 $\frac{1}{(x+3)^2}$ 完全吸收，餘下的最多只是 $\int \ln y \, \mathrm{d}y$。其餘兩個積分則可由對數定律（laws of logarithms）推出。

解答

導數

由商法則（quotient rule），

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}.$$

分子中含 x 的項互相抵消，只餘下一個常數。整道題之所以行得通，關鍵正在於此。

第一個積分

設 $y = \dfrac{x+1}{x+3}$。這符合 $(*)$ 的形式，其中 $a=1$，$b=1$，$c=1$，$d=3$，所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3-1}{(x+3)^2} = \frac{2}{(x+3)^2}, \qquad \text{即} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{(x+3)^2} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}y.$$

當 $x=0$ 時，$y=\frac{1}{3}$；當 $x=1$ 時，$y=\frac{1}{2}$。利用 $\int \ln y\,\mathrm{d}y = y\ln y - y$（以 $u=\ln y$ 作分部積分法（integration by parts）），可得：

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{(x+3)^2}\ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{1/3}^{1/2}\ln y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\Big[y\ln y - y\Big]_{1/3}^{1/2}\\ &= \frac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{2}\ln 2 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\ln 3 + \tfrac{1}{3}\right)\\ &= \frac{1}{6}\ln 3 - \frac{1}{4}\ln 2 - \frac{1}{12},\end{aligned}$$

其中用到 $\ln\frac{1}{2} = -\ln 2$ 和 $\ln\frac{1}{3} = -\ln 3$。這正是題目要求的結果。把這個積分記為 I_1。

一個相伴的積分

想一想 x^2+3x+2 與我們剛才用過的代換有甚麼關係？

它可因式分解為 $(x+1)(x+2)$，所以

$$\frac{x^2+3x+2}{(x+3)^2} = \frac{x+1}{x+3}\cdot\frac{x+2}{x+3} \qquad \text{及} \qquad \frac{x+1}{x+2} = \frac{x+1}{x+3}\Big/\frac{x+2}{x+3}.$$

因此，最後兩個積分中的所有對數，都是 $\ln\frac{x+1}{x+3}$ 與 $\ln\frac{x+2}{x+3}$ 的和與差（當 $0\le x\le 1$ 時，這些分式全部為正）。所以我們還需要多計算一個積分：

$$J = \int_0^1 \frac{1}{(x+3)^2}\ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)\mathrm{d}x.$$

設 $y = \dfrac{x+2}{x+3}$。這次 $a=1$，$b=2$，$c=1$，$d=3$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{(x+3)^2}$，而積分上下限變為 $y=\frac{2}{3}$ 和 $y=\frac{3}{4}$：

$$\begin{aligned}J &= \int_{2/3}^{3/4}\ln y\,\mathrm{d}y = \Big[y\ln y - y\Big]_{2/3}^{3/4}\\ &= \tfrac{3}{4}(\ln 3 - 2\ln 2) - \tfrac{3}{4} - \tfrac{2}{3}(\ln 2 - \ln 3) + \tfrac{2}{3}\\ &= \frac{17}{12}\ln 3 - \frac{13}{6}\ln 2 - \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

餘下的兩個積分

由於 $\ln\frac{x^2+3x+2}{(x+3)^2} = \ln\frac{x+1}{x+3} + \ln\frac{x+2}{x+3}$，第二個積分是

$$\begin{aligned}I_1 + J &= \left(\tfrac{1}{6}+\tfrac{17}{12}\right)\ln 3 - \left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{13}{6}\right)\ln 2 - \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{12}\\ &= \frac{19}{12}\ln 3 - \frac{29}{12}\ln 2 - \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

由於 $\ln\frac{x+1}{x+2} = \ln\frac{x+1}{x+3} - \ln\frac{x+2}{x+3}$，第三個積分是

$$\begin{aligned} I_1 - J &= \left(\tfrac{1}{6} - \tfrac{17}{12}\right)\ln 3 - \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{13}{6}\right)\ln 2 \\ &= \frac{23}{12}\ln 2 - \frac{5}{4}\ln 3, \end{aligned}$$

其中常數項 $-\frac{1}{12}$ 已互相抵消。

驗算

- 在 $[0,1]$ 上使用辛普森法則（Simpson's rule），得 $I_1 \approx -0.07352$，$J \approx -0.02878$，而第二和第三個積分分別 ≈ -0.10230 和 -0.04473，全部與精確形式吻合至小數點後十位。
- 粗略估計上下界：$\int_0^1 (x+3)^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}$，而 $\ln\frac{x+1}{x+2}$ 介乎 $\ln\frac{1}{2} \approx -0.69$ 與 $\ln\frac{2}{3} \approx -0.41$ 之間。所以第三個積分必定介乎約 -0.058 與 -0.034 之間，而 -0.0447 確實在此範圍內。
- 每個被積函數在 $[0,1]$ 上都是負數（對數內的每個分式都小於 1），所以三個答案都應該是負數，而事實亦是如此。

常見錯誤

- 在第一個代換中漏掉因子 $\frac{1}{2}$：該處 $ad - bc = 2$，但在第二個代換中則是 1。
- 沒有更改積分上下限，或在代換後仍沿用 x 的上下限 0 和 1。
- 為 $\frac{x+1}{x+2}$ 另作一個新的代換：這樣做是可行的，但 $(x+3)^{-2}$ 以 y 表示時會變得相當繁複。把對數拆開要快得多。

STEP 之外

形如 $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ 而 $ad - bc \neq 0$ 的映射，稱為莫比烏斯變換（*Möbius transformations*）。把兩個這樣的變換複合，相當於把 2×2 矩陣 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 相乘，而 $ad - bc$ 就是行列式（determinant），這正是它出現在導數中的原因。在複分析（complex analysis）中，它們恰好就是擴充複平面（extended plane）上的全部共形雙射（conformal bijections），並把圓和直線映射為圓和直線。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）中有一章對此有十分精彩的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。