詳細解答

STEP II 1999，第 5 題

純數學 • 三角方程

STEP II 1999，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/99-s2-q5

關鍵思路

有兩條自然的路線。一是以 $\cos\alpha$ 為未知數：先把 $\sin\alpha$ 分離出來，兩邊平方，再利用 $\sin^2+\cos^2=1$ 得出一條關於 $\cos\alpha$ 的二次方程（quadratic equation）。二是把 $5\cos x+12\sin x$ 寫成單一餘弦 $13\cos(x-\beta)$，這個寫法同時說明二次方程的兩個根確實都會出現。至於最後一部分，由於餘弦在 $[0,\pi]$ 上遞減，$\alpha<\frac{3}{4}\pi$ 其實是一個關於 $\cos\alpha$ 的命題。於是問題歸結為比較兩個根式（surd）的大小。

解答

$\cos\alpha$ 的兩個值

設 $c=\cos\alpha$。由方程得 $12\sin\alpha=7-5c$。兩邊平方，並利用 $\sin^2\alpha=1-c^2$，

$$144(1-c^2)=49-70c+25c^2,$$
$$169c^2-70c-95=0.$$

由二次公式（quadratic formula）得

$$c=\frac{70\pm\sqrt{70^2+4\cdot169\cdot95}}{2\cdot169}=\frac{70\pm\sqrt{69120}}{338}.$$

由於 $69120=576\times120=24^2\times120$，故 $\sqrt{69120}=24\sqrt{120}$。因此

$$\cos\alpha=\frac{35-12\sqrt{120}}{169}\qquad\text{或}\qquad\cos\alpha=\frac{35+12\sqrt{120}}{169},$$

這就是所求的結果，而另一個值是 $\dfrac{35+12\sqrt{120}}{169}$。

想一想 平方可能會產生增根。這兩個值是否真的都來自原方程的解？

是的，而單一餘弦的形式正好說明原因。設 β 為滿足 $\cos\beta = \frac{5}{13}$ 及 $\sin\beta = \frac{12}{13}$ 的銳角（acute angle）。則

$$5\cos x + 12\sin x = 13\cos(x-\beta),$$

所以方程即是 $\cos(x-\beta) = \frac{7}{13}$。設 γ 為滿足 $\cos\gamma = \frac{7}{13}$ 的銳角，於是 $\sin\gamma = \frac{\sqrt{169-49}}{13} = \frac{\sqrt{120}}{13}$。方程的解為 $x = \beta \pm \gamma + 2k\pi$，而

$$\cos(\beta\pm\gamma) = \cos\beta\cos\gamma \mp \sin\beta\sin\gamma = \frac{35 \mp 12\sqrt{120}}{169}.$$

所以兩個符號各自給出一個真正的解：$\alpha = \beta + \gamma$ 對應負號，$\alpha = \beta - \gamma$ 對應正號。

第二象限的解

假設 $\frac{1}{2}\pi < \alpha < \pi$。則 $\cos\alpha < 0$。由於 $\sqrt{120} > 10$，可知 $35 + 12\sqrt{120} > 0$，所以這個根被排除。另外 $12\sqrt{120} > 120 > 35$，所以另一個根是負數。因此

$$\cos\alpha = \frac{35 - 12\sqrt{120}}{169}.$$

餘弦在 $[0,\pi]$ 上嚴格遞減（strictly decreasing）。α 和 $\frac{3}{4}\pi$ 都在這個區間內，所以

$$\alpha < \tfrac{3}{4}\pi \iff \cos\alpha > \cos\tfrac{3}{4}\pi = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

因此我們須證明 $\dfrac{12\sqrt{120}-35}{169} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，即 $12\sqrt{120} - 35 < \dfrac{169}{\sqrt{2}}$。

想一想 不用計算機，又要避免把可能是負數的量平方，我們怎樣比較這些根式的大小？

我們先粗略地估計 $\sqrt{120}$ 的上界（bound）。因為 $120 < 121$，所以 $\sqrt{120} < 11$，於是

$$12\sqrt{120} - 35 < 132 - 35 = 97.$$

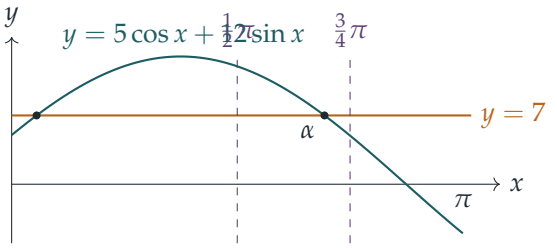
現在只需證明 $97 < \dfrac{169}{\sqrt{2}}$，即 $97\sqrt{2} < 169$。兩邊皆為正數，所以這等價於兩邊平方後的不等式（inequality）：

$$2\times 97^2 = 18\,818 < 28\,561 = 169^2,$$

而這是成立的。綜合以上各步，

$$\cos\alpha = -\frac{12\sqrt{120}-35}{169} > -\frac{97}{169} > -\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\tfrac{3}{4}\pi,$$

又因為餘弦在 $[0,\pi]$ 上遞減，所以 $\alpha < \frac{3}{4}\pi$，證明完畢。



驗算

- 以數值計算，在 $[0, 2\pi)$ 內的根為 $x \approx 0.1738$ 和 $x \approx 2.1782$。它們的餘弦值分別是 0.98493 和 -0.57073，與 $(35 \pm 12\sqrt{120})/169$ 吻合。
- 第二象限的根是 2.1782，小於 $\frac{3}{4}\pi \approx 2.3562$，正如圖像所示。兩者相差的餘裕相當充足：$\cos\alpha \approx -0.571$，而 $-1/\sqrt{2} \approx -0.707$。這就是粗略的估計 $\sqrt{120} < 11$ 已經足夠的原因。
- 作為對二次方程的合理性檢查，兩根之積為 $-\frac{95}{169}$，兩根之和為 $\frac{70}{169}$。

常見錯誤

- 沒有檢查正負號就把不等式兩邊平方。這裏 $12\sqrt{120} - 35$ 和 $169/\sqrt{2}$ 都是正數，但理由應當寫明。
- 忘記餘弦在 $[0, \pi]$ 上是遞減的，因而不等號要反轉：$\alpha < \frac{3}{4}\pi$ 對應的是 $\cos\alpha > -\frac{1}{\sqrt{2}}$。
- 沒有解釋為何在第二象限中要排除正根。

STEP 之外

最後一部分是嚴格估計的一個小練習。你把一個難以處理的量換成一個較簡單的界，再檢查餘裕是否仍然足夠；分析學（analysis）中許多不等式正是這樣證明的。由餘弦值推斷角的大小這一步，用到了嚴格單調函數（strictly monotonic function）保持（或反轉）次序這個事實，而這正是大學第一門分析課中反函數（inverse function）背後的想法。如想進一步了解如何嚴謹地處理不等式的證明，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（分析學入門教材）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。