詳細解答

STEP II 1999，第 4 題

純數學 • 二項式係數恆等式

> **STEP II 1999，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q4

關鍵思路

當兩個多項式（polynomial）恆等時，它們各次 x 冪的係數（coefficient）都相同。因此我們選取兩個二項展開式（binomial expansion）的乘積，使其 x^n 的係數正好是所求的和，然後從該乘積較簡單的形式再計算同一個係數。唯一真正要決定的，是選哪兩個因式相乘：把其中一個因式的 x 換成 $-x$，便得到第 (i) 部分所需的正負號；把其中一個因式求導，便得到第 (ii) 部分多出來的 t。

解答

第一個結果

根據二項式定理（binomial theorem），

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r.$$

把兩個這樣的展開式相乘。x^n 項是由第一個括號取 x^s、第二個括號取 x^{n-s} 而得，其中 s 滿足 $0 \le s \le n$。所以 $(1+x)^n(1+x)^n$ 中 x^n 的係數是

$$\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s}\binom{n}{n-s} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s}^2,$$

這裏用了對稱性 $\binom{n}{n-s} = \binom{n}{s}$，由階乘（factorial）公式可清楚看出。在恆等式的另一邊，$(1+x)^{2n}$ 中 x^n 的係數是 $\binom{2n}{n}$。兩個多項式恆等，所以它們 x^n 的係數相等：

$$\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s}^2 = \binom{2n}{n}.$$

第 (i) 部分

我們需要正負交替的符號，所以把第一個因式換成 $(1-x)^n = \sum_r \binom{n}{r}(-1)^r x^r$，並使用恆等式（identity）

$$(1-x)^n(1+x)^n \equiv (1-x^2)^n.$$

與之前一樣，左邊的 x^n 項來自第一個括號的 x^s 和第二個括號的 x^{n-s}，所以 x^n 的係數是

$$\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}\binom{n}{n-s} = \sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}^2.$$

在右邊，

$$(1-x^2)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^{2k}$$

只含 x 的偶數次冪。由於 n 是偶數，x^n 確實出現，即當 $2k=n$，亦即 $k=n/2$ 時，其係數為 $(-1)^{n/2}\binom{n}{n/2}$。比較係數，得

$$\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}^2 = (-1)^{n/2}\binom{n}{n/2},$$

正是所求。（同樣的論證顯示，當 n 是奇數時這個和等於 0，因為此時 $(1-x^2)^n$ 沒有 x^n 項。）

第 (ii) 部分

> **想一想** 怎樣才能令 $\binom{n}{t}$ 旁邊出現一個因子 t？

求導（differentiation）便可做到：$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^t = t\,x^{t-1}$。把二項展開式求導，得

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{t=1}^{n} t\binom{n}{t}x^{t-1}.$$

現在乘以 $(1+x)^n = \sum_u \binom{n}{u}x^u$，並使用恆等式

$$n(1+x)^{n-1}(1+x)^n \equiv n(1+x)^{2n-1}.$$

在左邊，x^{n-1} 項來自第一個括號的 $t\binom{n}{t}x^{t-1}$ 乘以第二個括號的 $\binom{n}{n-t}x^{n-t}$，所以 x^{n-1} 的係數是

$$\sum_{t=1}^{n} t\binom{n}{t}\binom{n}{n-t} = \sum_{t=1}^{n} t\binom{n}{t}^2.$$

在右邊，$n(1+x)^{2n-1}$ 中 x^{n-1} 的係數是 $n\binom{2n-1}{n-1}$。最後，

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{2n}{n}\cdot\frac{(2n-1)!}{(n-1)!\,n!} = 2\binom{2n-1}{n-1},$$

所以比較係數後乘以二，得

$$\sum_{t=1}^{n} 2t\binom{n}{t}^2 = 2n\binom{2n-1}{n-1} = n\binom{2n}{n}.$$

另一方法：有一個巧妙的對稱論證。把 t 換成 $n-t$，並利用 $\binom{n}{n-t} = \binom{n}{t}$，可見 $\sum_{t=0}^{n} t\binom{n}{t}^2 = \sum_{t=0}^{n}(n-t)\binom{n}{t}^2$。把同一個和的這兩個表達式相加，得

$$\sum_{t=0}^{n} 2t\binom{n}{t}^2 = n\sum_{t=0}^{n}\binom{n}{t}^2 = n\binom{2n}{n}$$

這是根據第一個結果，而 $t=0$ 的一項為零。

驗算

取 $n=4$，此時帕斯卡三角形（Pascal's triangle）的相應一行是 $1,4,6,4,1$。於是 $1+16+36+16+1 = 70 = \binom{8}{4}$；交錯和是 $1-16+36-16+1 = 6 = (-1)^2\binom{4}{2}$；而 $2(1\cdot 16 + 2\cdot 36 + 3\cdot 16 + 4\cdot 1) = 280 = 4\times 70$。我們亦已對 39 或以下的每一個 n 精確驗證過全部三個恆等式。

常見錯誤

- 忘記在第 (i) 部分中右邊只有偶數次冪，所以正正因為 n 是偶數，x^n 才會出現。
- 在第 (ii) 部分比較了錯誤的冪：求導之後指數減一，所以我們需要的是 x^{n-1}，而不是 x^n。

STEP 之外

第一個恆等式是范德蒙恆等式（Vandermonde's identity）$\sum_s \binom{m}{s}\binom{n}{k-s} = \binom{m+n}{k}$ 的特殊情況，後者亦有一個計數證明：從 m 名女士和 n 名男士中選出 k 人，方法是先決定選多少名女士。用多項式作為記錄數列的工具，就是生成函數（generating functions）的方法，它是組合數學（combinatorics）和概率論中的核心工具。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）全書都使用生成函數，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（高等數學難題）則有更多這種類型的題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。