詳細解答

STEP II 1999，第 3 題

純數學 • 數學歸納法

> **STEP II 1999，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q3

關鍵思路

不要一次又一次地從頭對 e^{-x^3} 求導。應該把第 n 階導數（derivative）寫成 $\mathrm{e}^{-x^3}S_n(x)$，然後對這個式子再求導一次。這樣便得到一個把 S_{n+1} 與 S_n 及 S_n' 連繫起來的遞推關係（recurrence），而題目的每一部分都可由這一個關係推出：各個多項式（polynomial）的具體形式、歸納法（induction）證明、次數（degree）與首項係數（leading coefficient），以及最後的不等式。

解答

遞推關係

根據定義，

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\mathrm{e}^{-x^3}) = \mathrm{e}^{-x^3}S_n(x).$$

利用積法則（product rule）再求導一次，

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}(\mathrm{e}^{-x^3}) = \mathrm{e}^{-x^3}S_n'(x) - 3x^2\mathrm{e}^{-x^3}S_n(x),$$

再乘以 e^{x^3}，得

$$\boxed{S_{n+1}(x) = S_n'(x) - 3x^2S_n(x).}$$

這對所有 $n \geq 0$ 都成立，其中 $S_0(x) = 1$（第零階導數就是函數本身）。

S_2 與 S_3

由 $S_0 = 1$ 出發，遞推關係給出 $S_1 = 0 - 3x^2 = -3x^2$，這也可以直接看出。然後

$$S_2 = S_1' - 3x^2 S_1 = -6x - 3x^2(-3x^2) = 9x^4 - 6x,$$

正如題目所求。再用一次遞推關係，

$$\begin{aligned} S_3 &= S_2' - 3x^2 S_2 = (36x^3 - 6) - 3x^2(9x^4 - 6x) \\ &= 36x^3 - 6 - 27x^6 + 18x^3, \end{aligned}$$

所以

$$S_3(x) = -27x^6 + 54x^3 - 6.$$

歸納法證明

我們證明一個更強的命題，因為這樣做不用多花工夫，還能一併回答下一問：

$P(n)$：$S_n(x)$ 是一個次數爲 $2n$ 的多項式，其首項係數爲 $(-3)^n$。

基礎情況。$S_1(x) = -3x^2$ 的次數為 2，首項係數為 $-3 = (-3)^1$，所以 $P(1)$ 成立。（$P(0)$ 亦成立，因為 $S_0 = 1$。）

歸納步驟。假設 $P(k)$ 成立，即

$$S_k(x) = (-3)^k x^{2k} + (\text{其餘各項，次數均低於} 2k).$$

多項式的導數仍是多項式，$3x^2 S_k$ 也是多項式，所以 $S_{k+1} = S_k' - 3x^2 S_k$ 是多項式。至於它的次數，把兩部分分開來看：

- S_k' 的次數至多為 $2k - 1$；
- $-3x^2 S_k(x) = -3(-3)^k x^{2k+2} + (\text{較低次項}) = (-3)^{k+1} x^{2k+2} + \cdots$。

> **想一想** S_k' 會不會把 $-3x^2 S_k$ 的最高次項抵消掉？

不會：S_k' 的次數至多為 $2k - 1$，遠低於 $2k + 2$，所以它碰不到 x^{2k+2} 這一項。因此 S_{k+1} 的次數恰好是 $2k + 2 = 2(k + 1)$，首項係數為 $(-3)^{k+1}$（非零）。這正是 $P(k + 1)$。

由歸納法，$P(n)$ 對所有 $n \geq 1$ 成立。所以 $S_n(x)$ 是一個階（即次數）為 $2n$ 的多項式，而 x^{2n} 的係數為 $(-3)^n$。這與 S_2（$9 = (-3)^2$，次數為 4）及 S_3（$-27 = (-3)^3$，次數為 6）吻合。

最後一部分

假設 $S_n'(a) = 0$。在遞推關係中代入 $x = a$，導數項便消失：

$$S_{n+1}(a) = S_n'(a) - 3a^2 S_n(a) = -3a^2 S_n(a).$$

因此

$$S_n(a)\, S_{n+1}(a) = -3a^2 \big(S_n(a)\big)^2 \le 0,$$

因為 $a^2 \ge 0$ 且 $\big(S_n(a)\big)^2 \ge 0$。等號成立當且僅當 $a = 0$ 或 $S_n(a) = 0$。證明至此完成。

驗算

- 首項：S_3 應以 $(-3)^3 x^6 = -27x^6$ 開首，事實確是如此。
- S_3 的常數項：在 $x = 0$ 附近，$\mathrm{e}^{-x^3} = 1 - x^3 + \cdots$，所以它在 0 處的第三階導數是 $-3! = -6$。這與 $S_3(0) = -6$ 相符。
- 一個駐點（stationary point）：$S_3'(x) = -162x^5 + 162x^2$ 在 $x = 1$ 處為零。在該點 $S_3(1) = 21$ 而 $S_4(1) = -3 \cdot 21 = -63$，所以乘積為 $-1323 \le 0$。
- 我們亦在三十個隨機有理數點 a 上，把 $S_0, \ldots, S_9$ 與 $\mathrm{e}^{-(a+h)^3}$ 的精確泰勒級數（Taylor series）作了對照，並在 $[-4, 4]$ 內 $S_1, \ldots, S_8$ 的每一個駐點上檢驗了該不等式。

常見錯誤

- 忘記說明為何次數恰好是 $2n + 2$。你需要首項係數非零，並且 S_k' 無法把它抵消，這就是為甚麼值得把首項係數一併放進歸納假設之中。
- 只證明「S_n 是多項式」，然後憑規律猜出次數。題目要求你從歸納論證本身得出次數。

STEP 之外

這裏的多項式是埃爾米特多項式（Hermite polynomials）的近親，後者是用同一技巧對 e^{-x^2} 定義的（即所謂「羅德里格斯公式」（Rodrigues formula））。它們滿足與我們這裏相似的遞推關係，並出現於概率論和量子諧振子（quantum harmonic oscillator）之中。最後的不等式讓我們初次窺見，這類遞推關係如何支配一整族多項式的零點和轉向點（turning point）的位置。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（常微分方程入門教材）在討論級數解的一章中會遇到埃爾米特方程。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。