詳細解答

STEP II 1999，第 2 題

純數學 • 二次方程的判別式

> **STEP II 1999，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q2

關鍵思路

一切取決於 $(*)$ 的判別式（discriminant）。由於 x 的係數帶有因子 2，四分之一判別式 $\frac{1}{4}(b^2-4ac)$ 特別簡潔，而且它原來是 n 的二次式（quadratic）。於是每一部分都變成關於另一個二次式的正負號的問題，這次以 n 為變量。

解答

全篇我們都假設 $pn^2+q\geq 0$，使平方根為實數，而 $(*)$ 是一個係數為實數的普通二次方程。（在第 (i) 及第 (iii) 部分，由於 $q>0$ 或 $q\geq 0$，這個條件自動成立。）取 $a=n$、$b=2\sqrt{pn^2+q}$ 及 $c=rn+s$，方程有實根（real roots）當且僅當 $b^2-4ac\geq 0$，即 $\frac{1}{4}b^2-ac\geq 0$。現在

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}b^2-ac&=(pn^2+q)-n(rn+s)\\&=(p-r)n^2-sn+q.\end{aligned}$$

設 $f(n)=(p-r)n^2-sn+q$。則

$$(*)\text{ 沒有實根}\iff f(n)<0.$$

第 (i) 部分

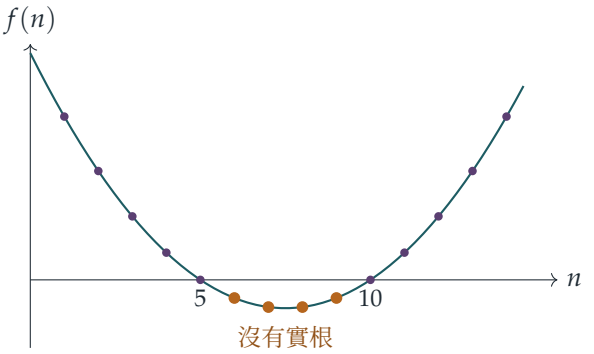
這裏 $p-r=1$，所以

$$f(n)=n^2-15n+50=(n-5)(n-10).$$

它為負數當且僅當 $5<n<10$。由於 n 是正整數，$(*)$ 沒有實根的情況恰好是

$$n\in\{6,7,8,9\}.$$

當 $n = 5$ 及 $n = 10$ 時，$f(n) = 0$，方程有一個實數重根（repeated root），所以這兩個值不包括在內。



第 (ii) 部分

現在 $p < r$，所以 f 的首項係數（leading coefficient）$p - r$ 為負數。把 f 看成實變量 t 的二次式：

$$f(t) = (p - r)t^2 - st + q.$$

它的判別式是

$$s^2 - 4(p - r)q,$$

根據假設 $4q(p - r) > s^2$，這個判別式為負數。

想一想 為甚麼 f 的判別式為負數，能告訴我們 $f(n)$ 的正負號？

判別式為負數的二次式沒有實零點，所以它的圖像永不穿過橫軸，對所有實數 t 都保持同一個正負號。首項係數為負數時，圖像是一條開口向下的拋物線（parabola），所以這個符號是負號。具體來說，用配方法（completing the square），

$$f(t) = (p - r)\Big(t - \frac{s}{2(p - r)}\Big)^2 + \frac{4q(p - r) - s^2}{4(p - r)},$$

兩項都是負數或零：第一項是因為 $p - r < 0$，第二項是因為其分子為正數而分母為負數。第二項嚴格小於零，所以對每一個實數 t 都有 $f(t) < 0$。

特別地，對每一個正整數 n 都有 $f(n) < 0$，所以無論 n 取甚麼值，$(*)$ 都沒有實根，這正是所要證明的。

留意這些假設必然導致 $q < 0$：由於 $p - r < 0$ 而 $4q(p - r) > s^2 \geq 0$，q 必定是負數。因此當 n 較小時，$pn^2 + q$ 確實可以是負數，而我們一直沿用的「平方根為實數」這個假設在這裏就很重要。（假如容許係數為虛數，$x = 0$ 便有可能是根：試試 $p = 1$、$r = 2$、$s = -2$、$q = -10$、$n = 1$。）

第 (iii) 部分

現在 $n=1$、$p-r=1$ 及 $q=s^2/8\geq 0$，所以 $p+q>0$，各係數均為實數。這裏

$$f(1)=1-s+\frac{s^2}{8}=\frac{s^2-8s+8}{8}.$$

方程有實根當且僅當 $f(1)\geq 0$，亦即當且僅當

$$s^2-8s+8\geq 0.$$

$s^2-8s+8=0$ 的根是

$$s=\frac{8\pm\sqrt{64-32}}{2}=4\pm 2\sqrt{2},$$

所以 $s^2-8s+8=\big(s-(4-2\sqrt{2})\big)\big(s-(4+2\sqrt{2})\big)$。這個乘積非負，當且僅當 s 位於兩根之間的開區間（open interval）之外。因此 $(*)$ 有實根當且僅當

$$s\leq 4-2\sqrt{2}\quad\text{或}\quad s\geq 4+2\sqrt{2},$$

這正是所要證明的。每一步都是可逆的，「當且僅當」的兩個方向正是由此而來。在兩個端點處，方程的根是重根。

驗算

- 在 (i) 中，取 $n=7$：$\frac{1}{4}b^2=3\cdot 49+50=197$ 而 $ac=7\cdot 29=203$，所以 $\frac{1}{4}b^2-ac=-6<0$。取 $n=11$：$413-11\cdot 37=6>0$。
- 在 (iii) 中，$4-2\sqrt{2}\approx 1.1716$ 而 $4+2\sqrt{2}\approx 6.8284$。取 $s=4$，得 $f(1)=1-4+2=-1<0$，它位於兩根之間的空隙內，與預期相符。
- 我們用電腦就 (i) 搜索了由 1 至 199 的 n，就 (ii) 測試了約 5 百萬個隨機情況，並就 (iii) 測試了 10^5 個隨機的 s 值。全部結果都與上文一致。

常見錯誤

- 在 (i) 中把 $n=5$ 及 $n=10$ 也包括在內。這時判別式為零，所以方程有一個（重複的）實根。
- 在 (ii) 中只驗證 n 很大時 $f(n)<0$。判別式條件的要點，正在於 f 處處為負數，包括 n 較小的時候。
- 忘記了 x 的係數中的因子 2，結果在判別式中把 $4(pn^2+q)$ 放錯了位置。

STEP 之外

這裏的做法，是把參數（parameter）當作新的變量，再考慮以它為變量的二次式的正負號；這正是研究多項式的根如何隨係數變化的起點。在大學，這會引伸到高次多項式的判別式，以及這樣的一個概念：二次型（quadratic form）$at^2 + bt + c$ 是負定（negative definite）的，當且僅當 $a < 0$ 且 $b^2 < 4ac$。同一個判別法用於兩個變量時，可以為多元函數的駐點（stationary points）分類。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）中還有很多建基於嚴謹判別式論證的 STEP 題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。