詳細解答

STEP II 1999，第 11 題

力學 • 拋體與移動目標

STEP II 1999，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/99-s2-q11

關鍵思路

目標始終留在圓上，所以炮彈必須落在水平面上與 O 相距恰好 R 之處；而炮總可以轉向，對準目標屆時所在的位置。因此一切歸結為同一個拋體（projectile）的兩項事實：它的射程（range）和飛行時間（time of flight）。轉過的角為 $\beta = \omega T$，再利用 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 消去 α，便得到那個四次方程（quartic）。最後一部分則是韋達定理（Vieta's formulas）加上圓的一條弦（chord）。

解答

我們把炮彈視為只受重力作用的質點（particle）（不計空氣阻力），從圓所在水平面上的 O 點發射，其中 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$。

第 1 部分：當 $V^2 < gR$

取坐標軸分別沿地面（在發射所在的平面內）及鉛垂向上。在時間 t，

$$x = Vt\cos\alpha, \qquad y = Vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

炮彈回到水平面（$y = 0$，$t > 0$）的時間為

$$T = \frac{2V\sin\alpha}{g}, \qquad \text{此時水平距離為} \qquad x(T) = \frac{2V^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{V^2\sin 2\alpha}{g}.$$

由於 $\sin 2\alpha \le 1$，無論在哪一個鉛垂面內發射，炮彈的落點與 O 的距離都不超過 V^2/g。目標始終在水平面上與 O 相距 R 之處，所以要命中就必須有 $R \le V^2/g$，即 $V^2 \ge gR$。因此若 $V^2 < gR$，炮彈永遠不能擊中目標，這正是所要證明的。

第 2 部分：β 所滿足的方程

現設 $V^2 > gR$。炮彈在時間 T、距離 R 處擊中目標，所以

$$T = \frac{2V\sin\alpha}{g}, \qquad R = \frac{2V^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

目標以恆定角速率 ω 轉動，所以 $\beta = \omega T$，由此得

$$\sin\alpha = \frac{g\beta}{2V\omega}.$$

把它代入射程的方程，

$$\cos\alpha = \frac{gR}{2V^2\sin\alpha} = \frac{gR}{2V^2}\cdot\frac{2V\omega}{g\beta} = \frac{R\omega}{V\beta}.$$

於是由 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 得

$$\frac{g^2\beta^2}{4V^2\omega^2} + \frac{R^2\omega^2}{V^2\beta^2} = 1,$$

全式乘以 $4V^2\omega^2\beta^2$，得

$$g^2\beta^4 - 4\omega^2V^2\beta^2 + 4R^2\omega^4 = 0,$$

這就是所求的方程。

? **想一想** 為甚麼恰好有兩個值，而不是最多四個，或者一個也沒有？

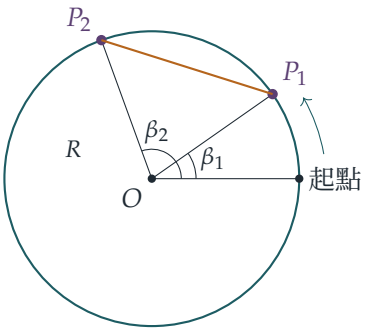
把它看成 β^2 的二次方程，其判別式（discriminant）為

$$16\omega^4V^4 - 16g^2R^2\omega^4 = 16\omega^4(V^4 - g^2R^2) > 0,$$

因為 $V^2 > gR$。所以 β^2 有兩個相異的實數值。它們的和 $4\omega^2V^2/g^2$ 與積 $4R^2\omega^4/g^2$ 都是正數，所以 β^2 的兩個值都是正數。角 $\beta = \omega T$ 是正數，所以 β^2 的每個值恰好對應一個 β，於是我們恰好有兩個候選值 $\beta_1 < \beta_2$。

每一個候選值都確實對應一次命中。對任何一個根，$g\beta/(2V\omega)$ 和 $R\omega/(V\beta)$ 這兩個數都是正數，而且（根據該方程）它們的平方和為 1，所以存在 $\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$，以這兩個數分別作為其正弦和餘弦。以這個仰角（elevation），在通過目標轉過 β 後所到達之點的鉛垂面內發射，飛行時間便是 β/ω，射程便是 R，所以炮彈與目標相遇。因此 β 恰好有兩個可能的值。（它們對應於射程同為 R 的兩個互餘仰角 α 和 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$。）

第 3 部分：距離 P_1P_2



兩個彈着點都在圓上，從發射一刻目標所在的位置起按逆時針方向量度，所對的角分別為 β_1 和 β_2。所以角 P_1OP_2 為 $\beta_2-\beta_1$（如有需要可按模 2π 化簡，這不影響弦長），而由等腰三角形 OP_1P_2 得

$$P_1P_2 = 2R\left|\sin\frac{\beta_2-\beta_1}{2}\right|.$$

由 β^2 的二次方程，

$$\beta_1^2+\beta_2^2 = \frac{4\omega^2V^2}{g^2}, \qquad \beta_1^2\beta_2^2 = \frac{4R^2\omega^4}{g^2},$$

又因為 $\beta_1,\beta_2>0$，可以取正平方根：$\beta_1\beta_2 = 2R\omega^2/g$。因此

$$\begin{aligned}(\beta_2-\beta_1)^2 &= \beta_1^2+\beta_2^2-2\beta_1\beta_2\\ &= \frac{4\omega^2V^2}{g^2}-\frac{4R\omega^2}{g} = \frac{4\omega^2}{g^2}\left(V^2-Rg\right),\end{aligned}$$

所以 $\beta_2-\beta_1 = \dfrac{2\omega}{g}\sqrt{V^2-Rg}$。故此

$$P_1P_2 = 2R\sin\left(\frac{\omega}{g}\sqrt{V^2-Rg}\right),$$

這正是所要證明的。（嚴格來說，這需要該正弦值非負，即 $\frac{\omega}{g}\sqrt{V^2-Rg}\le\pi$；否則距離是這個式子的絕對值。）

驗算

- 當 $V^2\to gR^+$ 時，兩個仰角都趨向 45°，所以 P_1 和 P_2 應該重合：公式的值確實趨向 0。
- 直接驗證 $\beta_1\beta_2 = 2R\omega^2/g$：$\beta_1\beta_2 = (2V\omega/g)^2\sin\alpha_1\sin\alpha_2$，而代入 $\alpha_2 = \frac{1}{2}\pi-\alpha_1$ 後，這等於 $(2V\omega/g)^2\sin\alpha_1\cos\alpha_1 = (4V^2\omega^2/g^2)(gR/2V^2)$，與預期相符。
- 數值上，取 $g=9.8$、$R=10$、$V=14$、$\omega=0.3$（國際單位制），逐步計算兩條軌跡，得出弦長約為 5.97 m，與 $20\sin\left(0.3\sqrt{98}/9.8\right)\approx 5.969$ 吻合。

常見錯誤

- 忘記了炮可以對準任何一個鉛垂面：第一部分只關乎射程，與目標碰巧身在何處無關。
- 對 $\beta_1^2\beta_2^2$ 開平方，卻沒有說明為甚麼 $\beta_1\beta_2$ 是正數。
- 寫成 $P_1P_2 = R(\beta_2 - \beta_1)$，這是弧長，而不是直線距離。

STEP 之外

擊中移動中的目標，是一個小型的追蹤（pursuit）或攔截（interception）問題：先求出命中的時間，再求出瞄準的方向。在兩條方程之間消去一個參數而得到一個多項式，然後不必解它，直接從係數讀出所需的資料，這種技巧你在大學裏會經常用到。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）正是以這種嚴謹的態度處理拋體和轉動運動。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。