詳細解答

STEP II 1999，第 10 題

力學 • 連續碰撞

> **STEP II 1999，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q10

關鍵思路

這條鏈上的每一次碰撞（impact）都是同一個模樣：一個質量為 μ、以速率 u 運動的粒子（particle），撞上一個質量為 $q\mu$ 的靜止粒子。因此，只要把第一次碰撞的計算按比例縮放，就能描述每一次碰撞。一旦知道每個粒子的最終速度，會否出現額外碰撞的問題，就歸結為比較相鄰粒子的最終速度；而當 $q = e$ 時，各個速度變得非常簡單，能量損失不過是一個等比級數（geometric series）。

解答

第一次碰撞

把各粒子視為沿直線運動的質點（point mass），並取由 P_1 指向 P_2 的方向為正。設 v_1 和 v_2 分別為 P_1 和 P_2 剛碰撞後的速度。由動量守恆（conservation of momentum）及牛頓恢復定律（Newton's law of restitution）得

$$\begin{aligned} mV &= mv_1 + qm\,v_2, \\ v_2 - v_1 &= eV. \end{aligned}$$

把 $v_2 = v_1 + eV$ 代入第一條方程，得 $V = v_1 + qv_1 + qeV$，所以

$$v_1 = \left(\frac{1-eq}{1+q}\right)V, \qquad v_2 = v_1 + eV = \frac{1-eq+e+eq}{1+q}\,V = \left(\frac{1+e}{1+q}\right)V,$$

正如所求。

每一次碰撞都是同一個模樣

記

$$\alpha = \frac{1-eq}{1+q}, \qquad \beta = \frac{1+e}{1+q}.$$

上面的計算完全沒有用到 m 的實際數值：一個質量為 μ、以速度 u 運動的粒子，撞上一個質量為 $q\mu$ 的靜止粒子後，自己以速度 αu 離開，並使對方以速度 βu 彈出。由於每個 P_{k+1} 的質量都是 P_k 的 q 倍，所以只要 P_k 撞上 P_{k+1} 時 P_{k+1} 仍然靜止，這個結果便適用。

當 $q \le e$ 時恰好有 $N-1$ 次碰撞

假設 $q \le e$。那麼 $eq \le e^2 < 1$，所以 $\alpha > 0$；另外亦有 $\beta > 0$。

沿着這條鏈逐一追蹤。P_1 撞上 P_2，碰撞後 P_1 的速度為 αV，P_2 的速度為 βV。由於 $\beta V > 0$，P_2 朝着靜止的 P_3 運動並撞上它；碰撞後 P_2 的速度為 $\alpha\beta V$，P_3 的速度為 $\beta^2 V$。如此類推，P_k 以速度 $u_k = \beta^{k-1}V > 0$ 到達靜止的 P_{k+1}，所以每一對相鄰粒子之間都有一次碰撞：即最少有 $N-1$ 次碰撞。這些碰撞之後，各粒子的速度為

$$w_k = \alpha\beta^{k-1}V \quad (1 \le k \le N-1), \qquad w_N = \beta^{N-1}V.$$

這些速度全部為正，所以所有粒子都朝同一方向運動。

> ? **想一想** 我們怎樣知道 P_k 永遠不會再追上 P_{k+1}？

兩者碰撞之後，P_k 從此以恆定速度 w_k 運動，因為它往後唯一可能接觸到的只有 P_{k+1} 或 P_{k-1}。與此同時，P_{k+1} 在撞上 P_{k+2} 之前以 $u_{k+1} = \beta^k V$ 運動，之後則以 w_{k+1} 運動（若 $k+1 = N$，則永遠保持前者）。P_k 與 P_{k+1} 之間的距離只有在 P_k 運動得較快時才會縮小，而：

- $u_{k+1} > w_k$，因為 $\beta^k V > \alpha\beta^{k-1}V$ 等價於 $\beta > \alpha$，即 $1+e > 1-eq$，而這是成立的；
- 對於 $k \le N-2$，有 $w_{k+1} \ge w_k$，因為 $w_{k+1}/w_k = \beta = \dfrac{1+e}{1+q} \ge 1$，而這正正是因為 $q \le e$；
- 對於 $k = N-1$，有 $w_N > w_{N-1}$，因為 $w_N/w_{N-1} = \beta/\alpha > 1$。

所以在兩者碰撞之後，P_{k+1} 永遠不會比 P_k 慢，兩者之間的距離永不縮小。（當 $q = e$ 時我們得到 $w_{k+1} = w_k$：距離保持不變，但不會縮小至零。）這對每一對相鄰粒子都成立，所以不會再有其他碰撞，碰撞次數恰好是 $N-1$ 次。

這就是 $q \le e$ 這個條件發揮作用的地方。假如 $q > e$，則 $\beta < 1$，每個粒子最終都比它後面的那個慢，這條鏈便會自己追上自己，產生更多碰撞。

當 $q = e$ 時損失的動能

現在 $q = e$，所以

$$\beta = \frac{1+e}{1+e} = 1, \qquad \alpha = \frac{1-e^2}{1+e} = 1-e.$$

每個粒子都是被速率為 V 的粒子撞上；碰撞之後 $P_1, \ldots, P_{N-1}$ 以 $(1-e)V$ 運動，而 P_N 以 V 運動。由於 P_k 的質量為 $e^{k-1}m$，最終的動能（kinetic energy）為

$$\begin{aligned} T &= \sum_{k=1}^{N-1} \tfrac{1}{2} e^{k-1} m (1-e)^2 V^2 + \tfrac{1}{2} e^{N-1} m V^2 \\ &= \tfrac{1}{2} m V^2 \left[(1-e)^2 \cdot \frac{1-e^{N-1}}{1-e} + e^{N-1} \right] \\ &= \tfrac{1}{2} m V^2 \left[(1-e)(1-e^{N-1}) + e^{N-1} \right], \end{aligned}$$

當中用了等比級數求和 $1 + e + \cdots + e^{N-2} = \dfrac{1-e^{N-1}}{1-e}$。最初的動能為 $\frac{1}{2}mV^2$，所以損失為

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} m V^2 - T &= \tfrac{1}{2} m V^2 \left[(1-e^{N-1}) - (1-e)(1-e^{N-1}) \right] \\ &= \tfrac{1}{2} m e \left(1 - e^{N-1} \right) V^2, \end{aligned}$$

這就是所求的結果。

驗算

- 逐次碰撞計算。當 $q = e$ 時，P_k 撞上 P_{k+1} 這次碰撞使 P_k 的速度由 V 變為 $(1-e)V$，使 P_{k+1} 的速度由 0 變為 V，損失的動能為 $\frac{1}{2}e^{k-1}mV^2\left[1-(1-e)^2-e\right] = \frac{1}{2}m(1-e)e^kV^2$。對 $k = 1, \ldots, N-1$ 求和，得 $\frac{1}{2}m(1-e)V^2 \cdot e\,\dfrac{1-e^{N-1}}{1-e}$，答案相同。
- 極限情況。當 $e \to 0$ 時，損失趨向 0；事實上，當 $q = e \to 0$ 時，後面各粒子的質量小得可以忽略。取 $N = 2$，公式給出 $\frac{1}{2}me(1-e)V^2$，與直接計算單一次碰撞的結果吻合。
- 數值檢驗。我們隨機選取 $N \le 12$、隨機的間距和隨機的 $q \le e$，逐個事件地模擬整個運動，每次都恰好得到 $N-1$ 次碰撞。當 $N = 5$、$q = e = \frac{1}{2}$、$m = V = 1$ 時，模擬得出的損失為 $0.234375 = \frac{15}{64}$，與 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{16}\right)$ 一致。

常見錯誤

- 只檢查了首 $N-1$ 次碰撞確實發生。「恰好」二字還需要論證：往後沒有任何粒子會追上它前面的那一個。

- 把 P_k 的最終速度與 P_{k+1} 剛碰撞後的速度（βu_k）比較，而不是與它撞上 P_{k+2} 並減慢之後的最終速度比較。
- 弄錯恢復定律中的正負號：等於 e 乘以接近速率的，是分離速率 $v_2 - v_1$。

STEP 之外

一串質量逐個把動量傳遞下去的粒子鏈，是衝擊波（shock）在顆粒物料中傳播的一維模型。質量穩定遞減的鏈，例如本題中 $q < 1$ 的情況，是物理學家研究的對象，用來分散和吸收衝擊。要重新整理能量的計算，有一個漂亮的方法，就是利用約化質量（reduced mass）$\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$：一次碰撞損失 $\frac{1}{2}\mu(1 - e^2)w^2$，其中 w 是接近速率。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）在質心參考系（centre-of-mass frame）中討論碰撞，在那裏這類結果變得一目了然。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。