詳細解答

STEP II 1999，第 1 題

純數學 • 大數的比較

> **STEP II 1999，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q1

關鍵思路

這些數大得根本無法直接比較，就連它們的對數（logarithm）也大得無從入手。突破口是取 $\log_{10}$ 兩次。由於 x、y 和 z 各自都是 10 的冪，每個雙重對數（double logarithm）都會化為 100、x 和 y 的簡短的和，而這些和很容易比較。因為 $\log_{10}$ 是遞增的，比較雙重對數就等於比較原來的數。

解答

全文以 log 表示 $\log_{10}$，並記

$$L(a) = \log(\log a).$$

函數 $t \mapsto \log t$ 是嚴格遞增（strictly increasing）的，所以對於 $a, b > 10$ 的數（此時 $\log a, \log b > 1 > 0$），$a < b$ 當且僅當 $L(a) < L(b)$。我們用到的基本事實是

$$\log x = 100, \qquad \log y = x = 10^{100}, \qquad \log z = y = 10^x.$$

第 (i) 部分

在斯特靈近似公式（Stirling's approximation）中取 $n = x$，再取 $\log_{10}$，得

$$\begin{aligned}\log a_1 &\approx \log\sqrt{2\pi} + \left(x + \tfrac{1}{2}\right)\log x - x\log \mathrm{e} \\ &= 100x - x\log \mathrm{e} + 50 + \log\sqrt{2\pi} \\ &= x\,(100 - \log \mathrm{e}) + 50.4\ldots.\end{aligned}$$

現在 $\log \mathrm{e} \approx 0.434$，而常數 $50.4\ldots$ 與 $x = 10^{100}$ 相比完全可以忽略。所以

$$\log a_1 \approx 99.566 \times 10^{100}, \qquad L(a_1) \approx 100 + \log 99.566 \approx 100 + 1.998 = 101.998\ldots \approx 102,$$

正如所求。

第 (ii) 部分

我們對每個數先計算 $\log a_i$，再計算 $L(a_i)$。

- $a_2 = x^y$：　$\log a_2 = y \log x = 100y$，所以 $L(a_2) = 2 + \log y = x + 2$。
- $a_3 = y^x$：　$\log a_3 = x \log y = x^2 = 10^{200}$，所以 $L(a_3) = 200$。
- $a_4 = z^x$：　$\log a_4 = x \log z = xy$，所以 $L(a_4) = \log x + \log y = x + 100$。
- $a_5 = \mathrm{e}^{xyz}$：　$\log a_5 = xyz \log \mathrm{e}$，所以

$$L(a_5) = 100 + x + y + \log(\log \mathrm{e}) \approx y + x + 99.64,$$

  因為 $\log(\log \mathrm{e}) = \log 0.434\ldots \approx -0.36$。
- $a_6 = z^{1/y}$：　$\log a_6 = \frac{1}{y} \log z = 1$，所以 $a_6 = 10$，這是精確值。
- $a_7 = y^{z/x}$：　$\log a_7 = \frac{z}{x} \log y = \frac{z}{x} \cdot x = z$，所以 $L(a_7) = \log z = y$。

連同第 (i) 部分得到的 $L(a_1) \approx 102$，各個雙重對數為

$$\underbrace{0}_{a_6},\ \underbrace{102}_{a_1},\ \underbrace{200}_{a_3},\ \underbrace{x+2}_{a_2},\ \underbrace{x+100}_{a_4},\ \underbrace{y}_{a_7},\ \underbrace{y+x+99.6}_{a_5}.$$

? **想一想** 第 (i) 部分只給出了 a_1 的近似值。這樣足以確定它的位置嗎？

足夠，而且我們甚至不需要用到斯特靈公式。$x!$ 的 x 個因子每個都不超過 x，所以 $x! \le x^x$，並且 $\log a_1 \le x \log x = 10^{102}$，由此得 $L(a_1) \le 102 < 200 = L(a_3)$。另外，$a_1 = x! > 10 = a_6$ 是顯然的。所以 $a_6 < a_1 < a_3$ 嚴格成立。

現在我們逐一說明餘下的比較。

- $a_3 < a_2$：$200 < 10^{100} + 2$。
- $a_2 < a_4$：$x + 2 < x + 100$。
- $a_4 < a_7$：我們需要 $x + 100 < y = 10^x$。這個不等式成立，而且相差極其懸殊，因為對於每個 $t \ge 3$ 都有 $10^t > t + 100$，而這裏 $t = x = 10^{100}$。
- $a_7 < a_5$：$y < y + x + 99.6$，因為 $x + 99.6 > 0$。（直接來看：$\log a_5 = z \cdot xy \log \mathrm{e}$ 而 $xy \log \mathrm{e} > 1$，所以 $\log a_5 > z = \log a_7$。）

除 a_6 以外，所有數都大於 10，所以 L 的單調性（monotonicity）適用，而大小次序為

$$a_6 < a_1 < a_3 < a_2 < a_4 < a_7 < a_5.$$

驗算

對於第 (i) 部分，我們取 $n = 10^2, 10^3, 10^5, 10^8$，把斯特靈公式與 $\log_{10} n!$ 的精確值（透過對數伽瑪函數（log-gamma function）求得）作比較。a_1 的雙重對數公式與精確值相差不超過 10^{-6}，而當 $n = 10^{100}$ 時，公式給出 101.998。對於第 (ii) 部分，我們取 $x = 10^k$，其中 $k = 2, 3, 4$，把整個計算重做一遍，這時 $y = 10^x$ 可以作為整數精確地儲存。每次都得出相同的次序 $a_6 < a_1 < a_3 < a_2 < a_4 < a_7 < a_5$，所以這個次序並不取決於 100 這個數的大小。

常見錯誤

- 只比較單重對數，然後迷失方向：$\log a_7 = z$ 和 $\log a_4 = xy$ 仍然太大，無法憑肉眼比較。要再取一次對數。
- 把 e^{xyz} 轉換為以 10 為底時，忘記了因子 $\log \mathrm{e}$。在這裏它幾乎沒有影響，但確實會令 $L(a_5)$ 偏移約 0.36。
- 沒有留意到 a_6 其實就是 10，是所有數中最小的。

STEP 之外

迭代對數（iterated logarithm）和指數塔在分析學和計算機科學中用來量度增長。例如，迭代對數 $\log^* n$ 出現在某些算法的運行時間中，而「塔」函數則在拉姆齊理論（Ramsey theory）中用作結果的界。斯特靈公式本身是一個漸近級數（asymptotic series）的首項，而嚴謹地證明它是大學一年級分析課的經典習題。想熟習當中涉及的極限和不等式，Abbott 的 *Understanding Analysis* 是很好的入門讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。