詳細解答

# STEP I 1999，第 9 題

力學 • 勻速率運動學

**STEP I 1999，第 9 題**

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

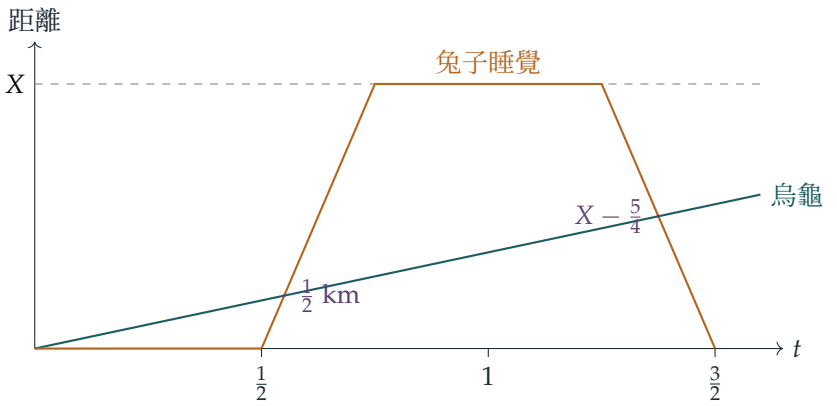
step.maths.org/questions/99-s1-q9

## 關鍵思路

所有運動都以恆定速率進行，所以每段路程所需的時間就是距離除以速率。兩隻動物每次相遇時，都是在同一時刻身處同一位置，因此我們分別寫出牠們各自在該刻的時鐘時間，再令兩者相等。兩次相遇給出兩條關於 $v$ 和 $V$ 的方程。改用 $1/v$ 和 $1/V$（每公里所需的小時數）來運算，方程便保持線性（linear）。

## 解答

我們把兩隻動物都看成沿同一條直線路徑以恆定速率（constant speed）運動，並忽略轉身所需的時間。時間 $t$ 以小時為單位，由起步一刻開始計算。下面的距離—時間圖（distance–time graph）（按最後求得的 $X$ 值繪畫）顯示了我們用到的兩個交點。



**第一次相遇**

烏龜在時間 $\dfrac{1/2}{v}$ 到達距離起點 $\frac{1}{2}$ km 的位置。兔子在 $t=\frac{1}{2}$ 起步，並在時間 $\frac{1}{2}+\dfrac{1/2}{V}$ 到達同一位置。牠們同時身處該處，所以

$$\frac{1}{2v}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2V},\qquad \text{即}\qquad \frac{1}{v}=1+\frac{1}{V}. \tag{1}$$

**第二次相遇**

兔子在時間 $\frac{1}{2}+\dfrac{X}{V}$ 到達菜園，睡了半小時，然後在 $1+\dfrac{X}{V}$ 離開。接着牠往回跑了 $\frac{5}{4}$ km，所以牠與烏龜相遇的時間是

$$1+\frac{X}{V}+\frac{5}{4V}=1+\frac{X+\frac{5}{4}}{V}.$$

烏龜此時仍在去程途中，距離起點 $X-\frac{5}{4}$ km，所以牠已經走了 $\dfrac{X-\frac{5}{4}}{v}$ 小時。令兩個時間相等：

$$\frac{X-\frac{5}{4}}{v}=1+\frac{X+\frac{5}{4}}{V}. \tag{2}$$

**想一想** 我們有兩條方程和兩個未知數，但 (2) 式中 $1/v$ 與 $X$ 相乘。怎樣才可以單獨求出 $V$？

我們把 (1) 代入 (2)。這樣 $X/V$ 的項便會互相抵消，$V$ 的結果因而如此簡潔：

$$\begin{aligned}\left(X-\tfrac{5}{4}\right)\left(1+\frac{1}{V}\right)&=1+\frac{X+\frac{5}{4}}{V}\\ X-\tfrac{5}{4}+\frac{X-\frac{5}{4}}{V}&=1+\frac{X+\frac{5}{4}}{V}\\ X-\tfrac{9}{4}&=\frac{5/2}{V}.\end{aligned}$$

因此

$$V=\frac{5/2}{X-\frac{9}{4}}=\frac{10}{4X-9},$$

正如所求。(要使這個速率為正數，我們需要 $X>\frac{9}{4}$，在最後一部分要記住這一點。)

然後由 (1) 得

$$\frac{1}{v}=1+\frac{4X-9}{10}=\frac{4X+1}{10},\qquad \text{所以}\qquad v=\frac{10}{4X+1}.$$

**求 $X$**

兔子在 $1+\dfrac{X}{V}$ 離開菜園，再用 $\dfrac{X}{V}$ 小時回到家，所以牠在 $1+\dfrac{2X}{V}$ 完成全程。令這個時間等於 $\frac{3}{2}$，得 $\dfrac{2X}{V}=\frac{1}{2}$，所以 $V=4X$。於是

$$\begin{aligned} 4X &= \frac{10}{4X-9} \\ 16X^2-36X-10&=0 \\ 8X^2-18X-5&=0 \\ (2X-5)(4X+1)&=0. \end{aligned}$$

根 $X=-\frac{1}{4}$ 不可能是距離（況且我們需要 $X>\frac{9}{4}$），所以

$$X=\tfrac{5}{2}\text{ km}.$$

取這個值時，兔子的速率是 $V=10\,\text{km/h}$，烏龜的速率是 $v=\frac{10}{11}\,\text{km/h}$。

## 驗算

把 $X=\frac{5}{2}$、$V=10$、$v=\frac{10}{11}$ 代回故事之中。烏龜在 $t=0.55$ 到達 $\frac{1}{2}\,\text{km}$ 處，而兔子在 $t=0.5$ 起步，需要 0.05 h 才到達該處：牠們相遇。兔子在 $t=0.75$ 到達菜園，並在 $t=1.25$ 離開。牠在 $t=1.375$ 到達距離菜園 1.25 km 的位置（亦即距離起點 1.25 km），而烏龜到達 1.25 km 處的時間是 $1.25\times 1.1=1.375$：牠們再次相遇。兔子回到家的時間是 $1.25+0.25=1.5$。把任意選取的 $X>\frac{9}{4}$ 的值代入 $V$ 和 $v$ 的公式，再重演整場比賽，同樣會得到相遇位置完全正確的結果。

## 常見錯誤

- 寫兔子的時鐘時間時，漏掉了牠其中一次半小時的睡眠，尤其是在菜園的那一次。
- 把第二個相遇點當成距離起點 $\frac{5}{4}\,\text{km}$，而不是距離菜園。
- 把二次方程（quadratic equation）的兩個根都保留：負的距離必須捨去，並要說明理由。

## STEP 之外

像上面那樣的距離—時間圖，把一道文字題轉化為直線在何處相交的問題，這正是任何力學課程中運動學（kinematics）的起點。這裏改用速率的倒數（配速，pace）來運算，

使方程變成線性；選取能把問題線性化（linearise）的變量，是應用數學中反覆出現的技巧。若想看看由這些想法發展出來的大學一年級程度運動理論，可參閱 Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力學入門）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。