詳細解答

STEP I 1999，第 8 題

純數學 • 調和級數的界限

> **STEP I 1999，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q8

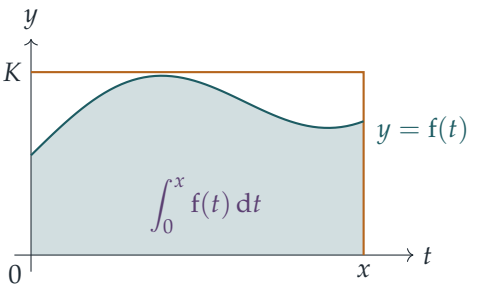
關鍵思路

積分就是面積，所以把曲線困在一個長方形之內，它的面積便被夾在 0 與長方形的面積之間。題目建議的被積函數（integrand）可用部分分式（partial fractions）拆開，其積分恰好等於 $\ln(\frac{n}{n-1}) - \frac{1}{n}$，而被積函數的上下界便給出所求的不等式。之後一切都會裂項相消（telescope）：對 n 求和，一連串的對數化為 $\ln N$，一連串的倒數之差則幾乎全部消去。

解答

估計積分的上下界

繪出 $y = \mathrm{f}(t)$ 在 $0 \le t \le x$ 的圖像。由於 $0 \le \mathrm{f}(t) \le K$，整條曲線位於以 $(0,0)$ 和 (x,K) 為頂點的長方形之內，並且在 t 軸上或其上方。



積分就是曲線下方陰影部分的面積。這面積不可能是負數，因為曲線從不跌到軸的下

方；它也不可能超過長方形的面積 Kx，因為該區域完全位於長方形之內。所以

$$0 \le \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t \le Kx.$$

關於 $\ln(\frac{n}{n-1})$ 的不等式

取 $n > 1$。當 $0 \le t \le 1$ 時，$n - t \ge n - 1 > 0$，所以被積函數有定義。把它拆成部分分式，

$$\frac{t}{n(n-t)} = \frac{1}{n}\cdot\frac{n-(n-t)}{n-t} = \frac{1}{n-t} - \frac{1}{n},$$

所以

$$\int_0^1 \frac{t}{n(n-t)}\,\mathrm{d}t = \Big[-\ln(n-t) - \frac{t}{n}\Big]_0^1 = \ln n - \ln(n-1) - \frac{1}{n} = \ln\Big(\frac{n}{n-1}\Big) - \frac{1}{n}.$$

現在估計被積函數在 $[0,1]$ 上的上下界。分子 t 非負，分母 $n(n-t)$ 為正，所以被積函數至少為 0。當 t 由 0 增加至 1 時，分子增大而正的分母減小，所以被積函數是遞增的，其最大值在 $t = 1$ 處取得：

$$0 \le \frac{t}{n(n-t)} \le \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

在第一個結果中取 $x = 1$ 及 $K = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$，得

$$0 \le \ln\Big(\frac{n}{n-1}\Big) - \frac{1}{n} \le \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

這正是所求。

由 $n = 2$ 求和至 N

把 $n = 2, 3, \ldots, N$（其中 $N \ge 2$）的不等式相加。對數部分會裂項相消，因為

$$\sum_{n=2}^{N} \ln\Big(\frac{n}{n-1}\Big) = \ln\Big(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{N}{N-1}\Big) = \ln N,$$

右邊各項亦然：

$$\sum_{n=2}^{N}\Big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\Big) = \Big(1 - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\Big) = 1 - \frac{1}{N}.$$

因此

$$0 \le \ln N - \sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n} \le 1 - \frac{1}{N} \le 1.$$

（當 $N = 1$ 時，和式為空，而 $\ln 1 = 0$，所以命題此時同樣成立。）

想一想 這個雙重不等式的哪一半告訴我們調和級數（harmonic series）發散（diverge），哪一半給出上界？

左半說明該和至多為 $\ln N$；右半說明它至少為 $\ln N - 1$。要證明發散，我們需要下界，所以用右半。

發散

由 $\ln N - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \le 1$ 可得 $\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \ge \ln N - 1$，再加上 $n = 1$ 的一項，

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \ge \ln N.$$

由於當 $N \to \infty$ 時 $\ln N \to \infty$，該和亦趨向無窮大。

$N < 10^{30}$ 時的上界

現在用左半：$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \le \ln N$，所以

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \le 1 + \ln N.$$

由於 $2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$，兩邊取十次方得 $10^{30} < 2^{100}$。所以若 $N < 10^{30}$，則 $N < 2^{100}$，而 ln 是遞增函數，故

$$\ln N < 100 \ln 2 < 100,$$

這裏用到 $\ln 2 < 1$，它成立是因為 $2 < \mathrm{e}$。因此

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \le 1 + \ln N < 101.$$

驗算

- 對多個 $n > 1$ 的值，以辛普森法則（Simpson's rule）計算 $\int_0^1 \frac{t}{n(n-t)}\,\mathrm{d}t$，結果都與 $\ln\left(\frac{n}{n-1}\right) - \frac{1}{n}$ 吻合。例如當 $n = 2$ 時，兩者都給出 $\ln 2 - \frac{1}{2} \approx 0.193$，它介乎 0 與 $\frac{1}{2}$ 之間。
- 對每個不超過 2×10^5 的 N，$\ln N - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n}$ 都落在 $[0, 1]$ 內。當 $N = 2 \times 10^5$ 時，它約為 0.4228，接近 $1 - \gamma \approx 0.4228$，其中 γ 是歐拉常數（Euler's constant）。
- 這個上界相當寬鬆：$1 + 30 \ln 10 \approx 70.1$，而事實上 $\sum_{n=1}^{10^{30}} \frac{1}{n} \approx 69.65$。調和級數確實發散，但發散得極其緩慢。

常見錯誤

- 用錯雙重不等式的一半：證明發散需要該和的下界，而最後一部分需要上界。
- 遺漏 $n = 1$ 的一項：不等式所涉及的是 $\sum_{n=2}^{N}$，而結論所涉及的是 $\sum_{n=1}^{N}$。
- 沒有說明為何被積函數的最大值在 $t = 1$ 處取得。只需指出它是遞增的（或直接指出 $t \leq 1$ 及 $n - t \geq n - 1$）便已足夠。

STEP 之外

$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln N$ 這個量是遞減的，並且有下界，所以它收斂（converge）。它的極限是歐拉常數 $\gamma \approx 0.5772$，而至今仍無人知道 γ 是否有理數。像我們在這裏所做的那樣，把和式與積分作比較，就是積分判別法（integral test），它是大學一年級分析課程中處理級數的首批工具之一。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是了解其嚴格論證的好去處。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。