詳細解答

STEP I 1999，第 7 題

純數學 • 二階微分方程

> **STEP I 1999，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q7

關鍵思路

函數 $\sin(k\sin^{-1}x)$ 看來很難求兩次導數，但只要設 $x=\sin\theta$，使 $y=\sin k\theta$，它就變得易於處理。先把一階導數（first derivative）乘以 $\sqrt{1-x^2}$ 再求導，可令代數運算保持簡短。至於最後一部分，重點在於：一個二階微分方程（second-order differential equation）若在某一點給定了函數值和斜率，就只有一個解，所以我們求得的多項式必定是 $\sin(3\sin^{-1}x)$。

解答

微分方程

設 $y=\sin(k\sin^{-1}x)$，其中 $-1<x<1$。根據鏈式法則（chain rule），並利用 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^{-1}x=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{k\cos(k\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}},\qquad\text{所以}\qquad\sqrt{1-x^2}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=k\cos(k\sin^{-1}x).$$

把第二個式子對 x 求導（左邊用積法則（product rule），右邊用鏈式法則）：

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{k^2\sin(k\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{k^2y}{\sqrt{1-x^2}}.$$

全式乘以 $\sqrt{1-x^2}$（當 $-1<x<1$ 時它不等於零），得

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+k^2y=0,$$

這正是所要證明的 $(*)$。

$k = 3$ 時的三次多項式解

設 $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$。由條件「當 $x = 0$ 時 $y = 0$」得 $D = 0$，而由「當 $x = 0$ 時 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3$」得 $C = 3$。現在

$$y' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \qquad y'' = 6Ax + 2B,$$

代入 $(*)$，其中 $k^2 = 9$：

$$(1 - x^2)(6Ax + 2B) - x(3Ax^2 + 2Bx + C) + 9(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = 0.$$

此式須對所有 x 成立，所以我們比較係數（compare coefficients）：

$$\begin{aligned}
x^3: &\quad -6A - 3A + 9A = 0 \text{ （對任何 } A \text{ 都成立），}\\
x^2: &\quad -2B - 2B + 9B = 5B = 0,\\
x^1: &\quad 6A - C + 9C = 6A + 8C = 0,\\
x^0: &\quad 2B + 9D = 0.
\end{aligned}$$

因此 $B = 0$（與 $D = 0$ 一致），而 $6A = -8C = -24$，得 $A = -4$。所求的解是

$$y = 3x - 4x^3.$$

$\sin 3\theta$ 的表達式

> **想一想** 同一個方程，我們有兩個解：$\sin(3\sin^{-1} x)$ 和 $3x - 4x^3$。為甚麼它們必定是同一個函數？

兩者都滿足 $k = 3$ 時的 $(*)$，而且在 $x = 0$ 處滿足相同的條件。對於多項式，這是我們在構造時已經定下的。對於 $y = \sin(3\sin^{-1} x)$，我們有 $y(0) = \sin 0 = 0$，並且由上面的一階導數得 $y'(0) = 3\cos 0/1 = 3$。

在 $-1 < x < 1$ 上，我們可以把 $(*)$ 除以 $1 - x^2 \neq 0$。這樣得到 $y'' = \dfrac{xy' - 9y}{1 - x^2}$，是一個係數連續（continuous）的二階線性方程，而這類方程在 $x = 0$ 處給定 y 和 y' 的值後，恰好只有一個解。（可以想像由 $x = 0$ 出發逐步向外走：方程會根據 y 和 y' 告訴你 y''，所以初始值決定了一切。）因此

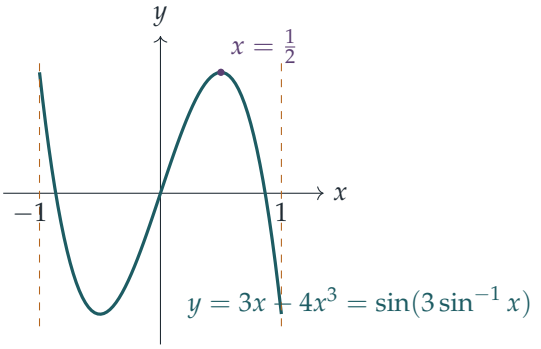
$$\sin(3\sin^{-1} x) = 3x - 4x^3 \qquad \text{對於 } -1 < x < 1,$$

而根據連續性，在 $x = \pm 1$ 處同樣成立。

現在設 $x = \sin\theta$，其中 $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$，於是 $\sin^{-1} x = \theta$：

$$\boxed{\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.}$$

這個恆等式（identity）對所有 θ 都成立，而不僅限於 $|\theta| \le \frac{\pi}{2}$。兩邊的周期（period）都是 2π。若 $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$，設 $\varphi = \pi - \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$。那麼 $\sin\varphi = \sin\theta$，且 $\sin 3\varphi = \sin(3\pi - 3\theta) = \sin 3\theta$，所以由 φ 的恆等式即可得出 θ 的恆等式。



這個圖像就是大家熟悉的曲線 $\sin 3\theta$ 透過 $x = \sin\theta$ 所見的樣子：當 θ 由 $-\frac{\pi}{2}$ 變到 $\frac{\pi}{2}$ 時，3θ 走過一個半振盪，因此在 $x = \pm\frac{1}{2}$ 處（即 $3\theta = \pm\frac{\pi}{2}$）有兩個轉向點（turning point）。

驗算

- $\theta = \frac{\pi}{2}$：$\sin\frac{3\pi}{2} = -1$，而 $3 - 4 = -1$。　$\theta = \frac{\pi}{6}$：$\sin\frac{\pi}{2} = 1$，而 $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$。
- 數值上，當 $\theta = 0.7$：$\sin 2.1 = 0.86321$，而 $3(0.64422) - 4(0.64422)^3 = 0.86321$。
- 同一個恆等式也可以由 $\sin(2\theta + \theta)$ 和二倍角公式（double-angle formulae）推出，這是一個很好的獨立驗算。

常見錯誤

- 直接用商法則（quotient rule）對 $\dfrac{k\cos(k\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}$ 求導：做法正確，但十分繁複。先消去平方根會簡潔得多。
- 忘記說明爲甚麼那個三次多項式等於 $\sin(3\sin^{-1}x)$。單是滿足同一個方程並不足夠：兩個解還必須有相同的 $y(0)$ 和 $y'(0)$。

STEP 之外

方程 $(*)$ 是切比雪夫（Chebyshev）方程。當 $k = n$ 是整數時，它有一個多項式解，而 $\cos(n\cos^{-1}x)$ 就是切比雪夫多項式（Chebyshev polynomial）$T_n(x)$，在數值逼近（numerical approximation）中佔有核心地位。我們用到的唯一性定理（uniqueness theorem，

即 Picard–Lindelöf 定理）會在大學一年級的微分方程課程中證明。處理這類方程的冪級數（power series）方法，可參閱 Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（一本微分方程入門教科書）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。