詳細解答

STEP I 1999，第 6 題

純數學 • 二次函數的極值

> **STEP I 1999，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q6

關鍵思路

直線在閉區間（closed interval）上的極值必定出現在端點，而哪一端取最大值、哪一端取最小值，只取決於斜率（gradient）的正負。對於 $c > 0$ 的二次函數（quadratic），圖像是一條 $\cup$ 形的拋物線（parabola）：最大值仍然在端點取得，但最小值則當頂點位於區間內時在頂點（vertex）取得，否則在較近的一端取得。因此，整道題歸根究底就是要問：頂點 $x = -b/(2c)$ 相對於 $[-10, 10]$ 位於何處。

解答

第 (i) 部分

設 $f(x) = bx + a$，則 $f(10) = a + 10b$ 及 $f(-10) = a - 10b$。

- 若 $b > 0$，f 嚴格遞增（strictly increasing），故最小值為 $f(-10) = a - 10b$（在 $x = -10$ 取得），最大值為 $f(10) = a + 10b$（在 $x = 10$ 取得）。
- 若 $b = 0$，則對所有 x 均有 $f(x) = a$，故最大值和最小值都是 a。
- 若 $b < 0$，f 嚴格遞減（strictly decreasing），故最大值為 $f(-10) = a - 10b$（在 $x = -10$ 取得），最小值為 $f(10) = a + 10b$（在 $x = 10$ 取得）。

三種情況可以歸納為

$$\text{最大值} = a + 10|b|, \qquad \text{最小值} = a - 10|b|.$$

第 (ii) 部分

設 $g(x) = cx^2 + bx + a$，其中 $c \geq 0$。若 $c = 0$，這就是第 (i) 部分，答案如上所述為 $a \pm 10|b|$。以下取 $c > 0$，並配方（complete the square）：

$$g(x) = c\left(x + \frac{b}{2c}\right)^2 + a - \frac{b^2}{4c}.$$

圖像是一條 $\cup$ 形的拋物線，頂點在 $x_0 = -\dfrac{b}{2c}$，g 在該處取得所有實數 x 之中的最小值。此外，g 在 $x < x_0$ 時遞減，在 $x > x_0$ 時遞增。兩個端點的值為

$$g(10) = a + 100c + 10b, \qquad g(-10) = a + 100c - 10b.$$

最大值。

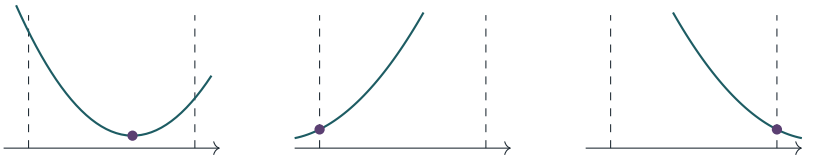
> **想一想** 為甚麼無論頂點在哪裏，g 在這個區間上的最大值都必定在其中一個端點取得？

由於 $c > 0$，$g(x)$ 只透過距離 $|x - x_0|$ 而取決於 x，並且隨這個距離增大而增大。在 $[-10, 10]$ 上，距離 $|x - x_0|$ 在其中一個端點最大（即離 x_0 較遠的那一端）。所以最大值是 $g(10)$ 與 $g(-10)$ 之中較大的一個，而兩者之差為 $g(10) - g(-10) = 20b$。因此：

- 若 $b > 0$，最大值為 $a + 100c + 10b$，在 $x = 10$ 取得；
- 若 $b < 0$，最大值為 $a + 100c - 10b$，在 $x = -10$ 取得；
- 若 $b = 0$，最大值為 $a + 100c$，在兩個端點同時取得。

在所有情況下，最大值 $= a + 100c + 10|b|$。這個結果在 $c = 0$ 時同樣成立。

最小值。 這時 x_0 的位置就至關重要了。頂點位於區間內，當且僅當 $-10 \leq -\frac{b}{2c} \leq 10$，即（各項乘以 $2c > 0$）$-20c \leq b \leq 20c$，亦即 $|b| \leq 20c$。



虛線為 $x = \pm 10$，圓點標示函數在區間上的最小值。

- $|b| \leq 20c$（**頂點在區間內**）。最小值就是全局最小值（global minimum），

$$a - \frac{b^2}{4c}, \quad \text{於} x = -\frac{b}{2c}.$$

- $b > 20c$（**頂點在左方，**$x_0 < -10$）。在 $[-10, 10]$ 上有 $x > x_0$，故 g 在該處遞增，最小值為 $g(-10) = a + 100c - 10b$，在 $x = -10$ 取得。
- $b < -20c$（**頂點在右方，**$x_0 > 10$）。這時 g 在整個區間上遞減，故最小值為 $g(10) = a + 100c + 10b$，在 $x = 10$ 取得。

頂點在區間外的兩種情況可以合併為：當 $|b| > 20c$ 時，最小值 $= a + 100c - 10|b|$。

> ? **想一想** 在邊界 $|b| = 20c$ 上會怎樣？兩條公式在那裏會否互相矛盾？

不會。若 $b = 20c$，則 $a - \frac{b^2}{4c} = a - 100c$，而 $a + 100c - 10b = a - 100c$ 亦然，因為這時頂點恰好在 $x = -10$。$b = -20c$ 的情況同理。所以當 b 越過 $\pm 20c$ 時，答案是連續地變化的，邊界歸入哪一種情況都沒有分別。

總結。 對於 $-10 \le x \le 10$ 及 $c \ge 0$：

$$\text{最大值} = a + 100c + 10|b|, \qquad \text{最小值} = \begin{cases} a - \dfrac{b^2}{4c}, & c > 0 \text{ 及} |b| \le 20c, \\ a + 100c - 10|b|, & |b| > 20c, \\ a, & b = c = 0. \end{cases}$$

$c = 0$、$b \neq 0$ 的情況屬於 $|b| > 20c = 0$，所得結果正是第 (i) 部分的答案。

驗算

- 取 $g(x) = x^2 + 4x + 1$：這裏 $|b| = 4 \le 20$，故最小值為 $1 - 4 = -3$，在 $x = -2$ 取得，而最大值為 $1 + 100 + 40 = 141$，在 $x = 10$ 取得。直接代入計算，結果相符。
- 取 $g(x) = x^2 + 30x$：這裏 $b = 30 > 20$，故頂點 $x = -15$ 在區間之外，最小值為 $g(-10) = 100 - 300 = -200$。事實上 $g(-10) = -200$，而且 g 在 $[-10, 10]$ 上遞增。
- 另外用電腦作了簡短的檢驗：對 1000 組隨機的 (a, b, c)（包括 $c = 0$ 和邊界 $|b| = 20c$ 的情況），以精確的有理數運算，把公式與在 $[-10, 10]$ 內 401 個點上逐點搜尋的結果比較。所有情況均相符。

常見錯誤

- 沒有檢查頂點是否位於 $[-10, 10]$ 內，就直接把 $a - \frac{b^2}{4c}$ 當作最小值。
- 遺漏了 $c = 0$（沒有頂點，而且不能除以 c）和 $b = c = 0$ 這兩種情況。

► 頂點在區間外時，弄錯哪一端取最小值：應該是較接近頂點的那一端。

STEP 之外

這道題背後的事實是極值定理（Extreme Value Theorem）：在有界閉區間上的連續函數（continuous function）必定取得最大值和最小值，而這些值不是在端點取得，就是在區間內的駐點（stationary point）取得。像 $cx^2 + bx + a$（其中 $c \geq 0$）這樣的凸函數（convex function）在端點取得最大值，這個觀察是凸優化（convex optimisation）的第一步，而凸優化正是現代應用數學許多範疇的基礎。Abbott 的 *Understanding Analysis* 對極值定理有嚴謹的證明。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。