詳細解答

# STEP I 1999，第 5 題

純數學 • 小角近似

**STEP I 1999，第 5 題**

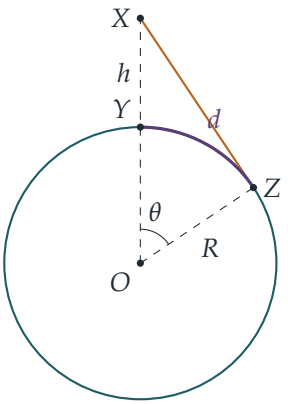
繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/99-s1-q5

## 關鍵思路

「剛好在地平線上看見」的意思是，由 $Z$ 望向 $X$ 的視線剛好擦過地球表面，所以這條視線是地球在 $Z$ 處的切線（tangent），並與半徑 $OZ$ 垂直。這樣便得到一個以地心 $O$ 為頂點之一的直角三角形，而弧（arc）$YZ$ 的長度等於 $R$ 乘以 $O$ 處的角。至於那兩個近似式（approximation），則分別來自考慮這個角很小的情況，以及這個角接近直角的情況。

## 解答




### 第 (i) 部分

設 $O$ 為地球的中心，並設 $\theta = \angle YOZ$。由於 $X$ 位於 $Y$ 的正上方，$O$、$Y$、$X$ 三點共線（collinear），且 $OX = R + h$。由於從 $Z$ 剛好可以看見 $X$，直線 $ZX$ 與地球相切於 $Z$，所

以它與半徑 $OZ$ 垂直。在直角三角形 $OZX$ 中，

$$\cos\theta = \frac{OZ}{OX} = \frac{R}{R+h}.$$

在半徑為 $R$ 的圓上，對應圓心角 $\theta$ 的弧 $YZ$ 的長度為 $R\theta$，所以

$$d = R\arccos\left(\frac{R}{R+h}\right).$$

這裏 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，因為 $0 < R/(R+h) < 1$。

**第 (ii) 部分**

當 $h$ 相對於 $R$ 很小時，$\cos\theta = R/(R+h)$ 接近 1，所以 $\theta$ 很小，我們可以使用 $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$。此外，

$$\frac{R}{R+h} = 1 - \frac{h}{R+h} \approx 1 - \frac{h}{R},$$

因為 $R + h \approx R$。令兩者相等，

$$1 - \tfrac{1}{2}\theta^2 \approx 1 - \frac{h}{R} \quad\Longrightarrow\quad \theta^2 \approx \frac{2h}{R} \quad\Longrightarrow\quad \theta \approx \sqrt{\frac{2h}{R}},$$

其中因 $\theta > 0$ 而取正根。因此

$$d = R\theta \approx R\sqrt{\frac{2h}{R}} = \sqrt{2}\,(Rh)^{1/2},$$

這正是所要求的形式，其中 $k = \sqrt{2}$。

**第 (iii) 部分**

現在 $R/(R+h)$ 很小，所以 $\cos\theta$ 接近 0，而 $\theta$ 接近 $\frac{\pi}{2}$，並不是小角。題目給出的近似式只適用於小角，所以我們改為量度那個*確實*很小的角。

> **想一想** 這裏哪一個角是小角？哪一個近似式適用於它？

記 $\theta = \frac{\pi}{2} - \phi$，其中 $\phi = \angle OXZ$ 是衛星處的角，當衛星離得很遠時，這個角很小。於是 $\cos\theta = \sin\phi$，所以

$$\sin\phi = \frac{R}{R+h}.$$

我們需要把這個式子準確至 $R/h$ 的二階，因為答案中有一項 $R^2/h$。由二項式展開（binomial expansion），因 $R/h < 1$ 而成立，

$$\frac{R}{R+h} = \frac{R}{h}\left(1 + \frac{R}{h}\right)^{-1} = \frac{R}{h} - \frac{R^2}{h^2} + \cdots.$$

利用 $\sin\phi \approx \phi$，

$$\phi \approx \frac{R}{h} - \frac{R^2}{h^2}.$$

因此

$$\begin{aligned} d = R\theta &= R\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) \\ &\approx \frac{\pi}{2}R - \frac{R^2}{h} + \frac{R^3}{h^2}. \end{aligned}$$

最後一項比 $R^2/h$ 還要再小一個因子 $R/h$，所以我們把它捨去，得到

$$d \approx \frac{\pi}{2}R - \frac{R^2}{h},$$

這正是所要求的形式，其中 $a = \frac{\pi}{2}$ 及 $b = -1$。

在這個階數下使用 $\sin\phi \approx \phi$ 是穩妥的：它的誤差約為 $\frac{1}{6}\phi^3$，屬於 $R^3/h^3$ 的階，所以只會在 $R^4/h^3$ 這一階才影響 $d$。

## 驗算

- 極限情況合理。當 $h \to 0$ 時，$d \to 0$。當 $h \to \infty$ 時，$d \to \frac{\pi}{2}R$，即繞地球四分之一圈：一顆非常遙遠的衛星幾乎可以看見整個半球。$-R^2/h$ 這一項是負數，所以 $d$ 從下方趨近 $\frac{\pi}{2}R$，這是必然的，因為 $\theta < \frac{\pi}{2}$。
- 數值上，取 $R = 1$ 及 $h = 10^{-4}$，$d$ 的準確值除以 $\sqrt{2Rh}$ 得 0.99996。取 $h = 1$ 及 $R = 0.01$，$d$ 的準確值與 $\frac{\pi}{2}R - R^2/h$ 相差 $9.9 \times 10^{-7}$，約為 $R^3/h^2$，與預測相符。
- 若衛星位於半徑為 6370 km 的地球上空 300 km 處，$d$ 的準確值約為 1918 km，而 $\sqrt{2Rh}$ 給出 1955 km。

## 常見錯誤

- 在第 (iii) 部分使用 $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$，但那裏 $\theta$ 接近 $\frac{\pi}{2}$，並不是小角。
- 在第 (iii) 部分只把 $R/(R+h)$ 展開至一階，結果失去了 $R^2/h$ 這一項，得出錯誤的 $b$。

## STEP 之外

這兩部分都是漸近展開（asymptotic expansion）：把 $d$ 的準確值按一個小參數（small parameter）$h/R$ 或 $R/h$ 的冪展開，保留至指定階數的各項，同時估計誤差的上界。利

用大 $O$ 記號和帶餘項的泰勒定理（Taylor's theorem with remainder）把「≈」說得精確，是大學一年級數學分析的課題；可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（數學分析入門教材）。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（進階數學難題集）中有更多這類近似法的 STEP 練習。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。