詳細解答

STEP I 1999，第 4 題

純數學 • 含絕對值的區域

> **STEP I 1999，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q4

關鍵思路

絕對值（modulus）符號把平面分成若干區域，在每個區域內各括號的正負號固定，於是條件就變成普通的線性不等式（最後一部分則是雙曲線型的不等式）。另一個大大節省時間的方法是利用對稱（symmetry）和平移（translation）：$|x|$ 和 $|y|$ 令集合對兩條坐標軸都對稱，所以只需在一個象限內計算，然後作反射；而把 x 換成 $x-1$，只是把整個圖形向右平移一個單位。

解答

第 (i) 部分

把 x 換成 $-x$ 或把 y 換成 $-y$，集合都不變，所以它對兩條坐標軸都對稱。在第一象限（$x \geq 0$，$y \geq 0$）內，條件就是 $x+y \leq 1$：即頂點為 $(0,0)$、$(1,0)$、$(0,1)$ 的三角形。對兩條坐標軸作反射，便得到四個三角形，合起來是一個以一角豎立的正方形，頂點為

$$(1,0), \quad (0,1), \quad (-1,0), \quad (0,-1).$$

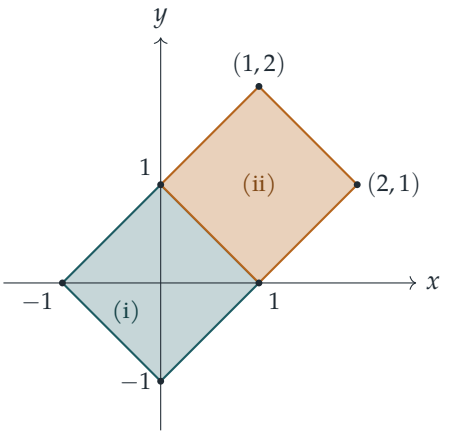
換句話說，它是四個半平面（half-plane）$\pm x \pm y \leq 1$ 的交集。邊界包括在內（不等式是 $\leq$），面積為 2。

第 (ii) 部分

設 $X = x-1$，$Y = y-1$。條件於是變成 $|X|+|Y| \leq 1$，也就是 (X,Y) 坐標下的第 (i) 部分。因此這個集合就是把第 (i) 部分的正方形平移 $(1,1)$ 所得：中心為 $(1,1)$，頂點為

$$(2,1), \quad (1,2), \quad (0,1), \quad (1,0),$$

由直線 $x+y=1$、$x+y=3$、$y=x+1$ 和 $y=x-1$ 圍成。它與兩條坐標軸相接，接點分別是 $(1,0)$ 和 $(0,1)$。



第 (iii) 部分

同樣先作平移：設 $X=x-1$，$Y=y+1$，條件變成

$$|X|\le 1+|Y|.$$

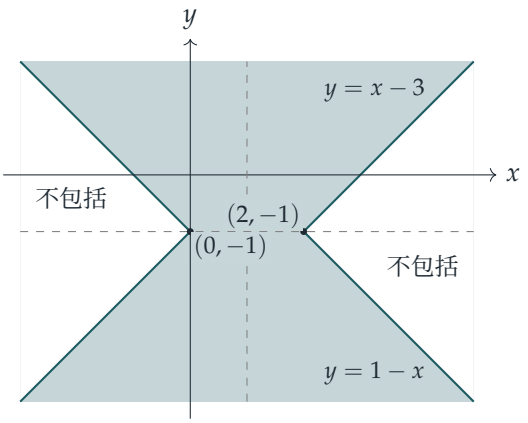
這個條件對 X 軸和 Y 軸都對稱，即對直線 $x=1$ 和 $y=-1$ 對稱。在象限 $X\ge 0$、$Y\ge 0$ 內，條件是 $X\le 1+Y$：即直線 $X=1+Y$ 左方的所有點，這條直線通過 $(1,0)$，斜率為 1。作反射之後，這個集合包含平面上所有的點，只除去兩個開的楔形區域：

- 右邊是 $X>1+|Y|$：一個直角楔形，頂點為 $(X,Y)=(1,0)$，向右張開，邊界為 $Y=\pm(X-1)$；
- 左邊是 $X<-1-|Y|$：它的鏡像，頂點為 $(-1,0)$，向左張開。

想一想 這個集合是否像 (i) 和 (ii) 那樣有界（bounded）？

不是。那個負號改變了一切：$|Y|$ 越大，條件反而越容易滿足，所以對每個固定的 Y，容許的 X 構成區間 $-1-|Y|\le X\le 1+|Y|$，而這個區間隨 $|Y|$ 增大而變闊。特別地，整條垂直線 $X=0$（即 $x=1$）都在集合之內。

回到 x,y 坐標，兩個頂點是 $(2,-1)$ 和 $(0,-1)$。被排除的右楔形是 $x>2+|y+1|$，邊界是 $x\ge 2$ 時的兩條半直線 $y=x-3$ 和 $y=1-x$；被排除的左楔形是 $x<-|y+1|$，邊界是 $x\le 0$ 時的 $y=x-1$ 和 $y=-1-x$。邊界線本身屬於這個集合。在直線 $y=-1$ 上，集合只是線段 $0\le x\le 2$，那是它最窄的地方。



虛線 $x = 1$ 和 $y = -1$ 是對稱軸。

第 (iv) 部分

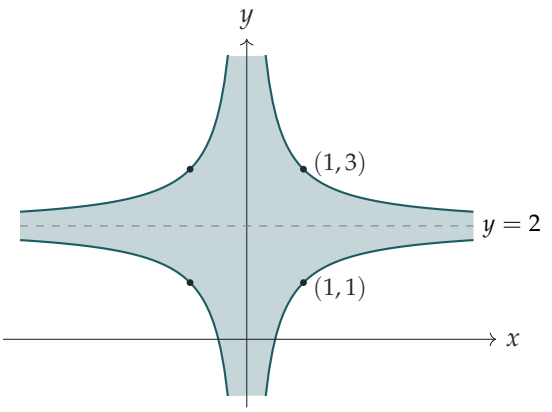
設 $Y = y - 2$，條件變成 $|x|\,|Y| \le 1$，它對 x 軸方向和直線 $Y = 0$（即 $y = 2$）都對稱。在象限 $x \ge 0$、$Y \ge 0$ 內：

- 若 $x = 0$，條件對任何 Y 都成立，所以整條 y 軸都在集合之內；
- 若 $x > 0$，我們可以除以 x，條件變成 $0 \le Y \le 1/x$：即雙曲線（hyperbola）$Y = 1/x$ 下方的區域。

對兩條對稱軸作反射，這個集合就是

$$x = 0, \quad \text{或} \quad 2 - \frac{1}{|x|} \le y \le 2 + \frac{1}{|x|} \ \ (x \ne 0),$$

即夾在雙曲線 $(y-2)x = \pm 1$ 四條分支之間的區域。它包含整條 y 軸和整條直線 $y = 2$，而這兩條直線正是邊界曲線的漸近線（asymptote）。它看起來像一個以 $(0, 2)$ 為中心的粗身加號：「正方形」$|x| \le 1$、$|y - 2| \le 1$ 的四個角落在邊界上，位於 $(\pm 1, 1)$ 和 $(\pm 1, 3)$；當 $|x| \to \infty$ 時，橫臂向 $y = 2$ 收窄；當 $|y| \to \infty$ 時，直臂向 y 軸收窄。這個集合是無界的（不過有趣的是，它的面積是無限大）。



驗算

- 取幾個點代入原來的不等式檢驗。在 (iii) 中，$(1, 100)$ 給出 $0 - 101 \leq 1$，所以它在集合之內（證實集合是無界的），而 $(2.01, -1)$ 給出 $1.01 > 1$，剛好在右邊頂點之外。在 (iv) 中，$(2, 2.5)$ 給出 $2 \times 0.5 = 1$，在邊界上，而 $(2, 2.51)$ 則剛好在外面。
- 在 (i) 中，四個三角形每個面積為 $\frac{1}{2}$，所以正方形的面積是 2；用格點數算得到 2.002。
- 我們為每一部分在 $[-6, 6]^2$ 內測試了 400,000 個隨機點，把原來的不等式與我們的描述（半平面、被排除的楔形，或 $|y - 2| \leq 1/|x|$）互相比較；結果完全一致。

常見錯誤

- 在 (ii) 和 (iii) 中，平移方向弄錯：$|x - 1|$ 把圖形移到 $x = +1$，而 $|y + 1|$ 把圖形移到 $y = -1$。
- 在 (iii) 中，仿照 (i) 畫出一個有界的菱形。負號把 $|y + 1|$ 的作用倒轉了，集合其實是無界的。
- 在 (iv) 中，沒有另外處理 $x = 0$ 就除以 $|x|$，因而遺漏了整條 y 軸都屬於這個集合這一事實。

STEP 之外

(i) 中的集合是「計程車」範數（taxicab norm）$\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$ 的單位球（unit ball），而 (ii) 則是以 $(1, 1)$ 為中心、半徑為 1 的球。不同的範數給出形狀不同的單位球（通常的距離給出圓形，$\max(|x|, |y|)$ 給出邊為水平的正方形），而分析或度量空間（metric space）

的入門課程會證明，在 $\mathbb{R}^2$ 上它們所定義的收斂（convergence）和連續（continuity）概念完全相同。Bartle 與 Sherbert 合著的 *Introduction to Real Analysis*（實分析入門）是認識這些概念的好起點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。