詳細解答

STEP I 1999，第 3 題

純數學 • 輪換方程組

> **STEP I 1999，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q3

關鍵思路

每條方程都是 $x_k = f(x_{k+1})$ 的形式，其中 $f(x) = 1 + 1/x$，而整個方程組首尾相接，形成一個環。相鄰兩項之差遵從一個簡單的規律：每個差等於下一個差除以兩個大於 1 的數之積。因此沿着環走一圈，這些差只會愈來愈小。既然最後回到起點，它們必定全部為零。

以下一律把下標按循環（cyclic）方式理解：x_{n+1} 即 x_1，x_{n+2} 即 x_2。這樣，方程組中每條方程都可寫成同一形式

$$x_k = 1 + \frac{1}{x_{k+1}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

解答

第 (i) 部分

所有 x_k 皆為正數，所以對每個 k 都有 $1/x_{k+1} > 0$。因此

$$x_k = 1 + \frac{1}{x_{k+1}} > 1 \qquad \text{對於} k = 1, 2, \ldots, n,$$

而由於下標是循環的，這已涵蓋 $x_1, \ldots, x_n$ 中的每一個（最後一個是 $x_n = 1 + 1/x_1$）。所以 $x_1, x_2, \ldots, x_n > 1$。

第 (ii) 部分

把第一條方程減去第二條方程：

$$x_1 - x_2 = \left(1 + \frac{1}{x_2}\right) - \left(1 + \frac{1}{x_3}\right) = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3} = \frac{x_3 - x_2}{x_2 x_3} = -\frac{x_2 - x_3}{x_2 x_3},$$

這正是所求的結果。我們只用了 $x_1 = 1 + 1/x_2$ 和 $x_2 = 1 + 1/x_3$（以及 $n \geq 3$，使得 x_3 是另一個變量）。對任意兩條相鄰的方程作完全相同的計算，便得到對每個 k 都有

$$x_k - x_{k+1} = -\frac{x_{k+1} - x_{k+2}}{x_{k+1} x_{k+2}} \qquad \text{(下標按循環方式理解).}$$

第 (iii) 部分

記相鄰兩項之差為 $d_k = x_k - x_{k+1}$，故 $d_n = x_n - x_1$。(ii) 的一般形式就是 $d_k = -d_{k+1}/(x_{k+1}x_{k+2})$。取絕對值（absolute value），並利用第 (i) 部分所給出的 $x_{k+1}x_{k+2} > 1$，

$$|d_k| = \frac{|d_{k+1}|}{x_{k+1}x_{k+2}} \leq |d_{k+1}|,$$

而且只要 $d_{k+1} \neq 0$，不等式（inequality）就是嚴格成立的。把這些不等式沿着環逐一串連起來，

$$|d_1| \leq |d_2| \leq |d_3| \leq \cdots \leq |d_n| \leq |d_1|.$$

兩端是同一個數，所以這串不等式中每一個都是等式。特別地，$|d_1| = |d_2|$。但假如 $d_2 \neq 0$，我們便會有嚴格的 $|d_1| < |d_2|$，所以 $d_2 = 0$；於是所有 $|d_k|$ 既然都等於 $|d_2|$，也就全部為零。

> ? **想一想** 我們究竟在哪一步用到了方程組首尾相接，即 $x_n = 1 + 1/x_1$？

只在這串不等式的最後一環 $|d_n| \leq |d_1|$ 用到，它來自 $x_n = 1 + 1/x_1$。沒有這一環，這些差大可以隨 k 增加而愈來愈大；事實上，一條不閉合的鏈 $x_1, \ldots, x_n$ 不一定是常數。正是因為要回到起點，所謂的縮小才被迫變成完全沒有縮小。

所以對每個 k 都有 $x_k = x_{k+1}$，即 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$。

x_1 的值

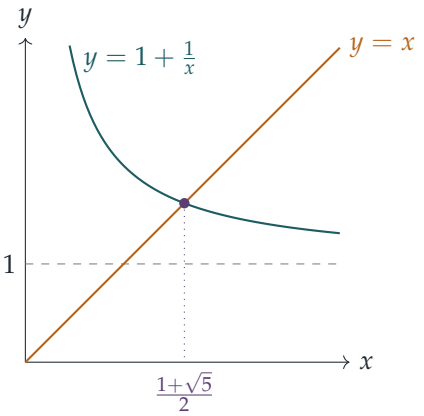
把這個共同的值稱為 x。現在任何一條方程都變成 $x = 1 + 1/x$，所以

$$x^2 - x - 1 = 0, \qquad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

由第 (i) 部分知 $x > 1$，故負根須捨去，所以

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

反過來，令每個 x_k 都等於這個值，確實滿足全部 n 條方程，所以方程組的確有這個解，而由 (iii) 可知再沒有其他解。從幾何上看，x 就是曲線 $y = 1 + 1/x$ 與直線 $y = x$ 相交之處：



驗算

- 取 $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180$，得 $1 + 1/x \approx 1 + 0.6180 = 1.6180$，符合要求。
- (ii) 中的恆等式（identity）可以用任何一條不閉合的鏈來檢驗：取 $x_3 = 2$，則 $x_2 = \frac{3}{2}$，$x_1 = \frac{5}{3}$。於是 $x_1 - x_2 = \frac{1}{6}$，而 $-(x_2 - x_3)/(x_2 x_3) = \frac{1/2}{3} = \frac{1}{6}$。
- 沿着環走完一整圈，得 $x_1 = f^n(x_1)$，其中 $f(x) = 1 + 1/x$。對 $n = 3, \ldots, 11$，在 $(0, 20)$ 上以數值方法掃描 $f^n(x) - x$，只找到一次變號，位於 $x \approx 1.618$，由此確認沒有其他解。

常見錯誤

- 單憑 $|d_1| \leq |d_2|$ 就去證明 (iii)。一步只說明這些差不會變大；你必須沿着環走完一整圈，回到 $|d_1|$。
- 先假設各個 x_k 相等，然後求 x_1。第 (iii) 部分才是這樣做的依據，而它需要第 (i) 部分的嚴格不等式 $x_{k+1} x_{k+2} > 1$。
- 忘記捨去 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，它是負數。

STEP 之外

這道題的核心在於：在 $x > 1$ 上，$f(x) = 1 + 1/x$ 會把點拉得更近，因為 $|f(a) - f(b)| = |a - b|/(ab)$。這樣的映射稱為壓縮映射（contraction），而巴拿赫不動點定理（Banach fixed-point theorem）指出，完備空間（complete space）上的壓縮映射恰有一個不動點，而且從任何起點開始迭代（iteration）都會收斂（converge）到這個不動點。在這裏從 $x = 1$ 開始迭代，得到的是相鄰斐波那契數（Fibonacci numbers）之比 $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \ldots$，以及黃金比（golden ratio）的連分數（continued fraction）$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}$。分析方面，可讀 Abbott 的 *Understanding Analysis*。連分數方面，可讀 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。