詳細解答

STEP I 1999，第 2 題

純數學 • 軌跡與形心

> **STEP I 1999，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q2

關鍵思路

寫下條件並展開，便會得到 x^2 和 y^2 的係數同為 3，而且沒有 xy 項：這正是圓的特徵。配方法（completing the square）顯示出圓心的位置，而形心（centroid）亦自然出現，因為一次項中出現的正是 $x_1+x_2+x_3$。至於對 a^2 的限制，只要問一問「半徑的平方」何時可以是負數，答案便呼之欲出。

解答

軌跡

設 $P=(x,y)$ 為軌跡（locus）上的一點，並記 $A_i=(x_i,y_i)$，其中 $i=1,2,3$。條件是

$$\sum_{i=1}^{3}\left[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2\right]=a^2.$$

展開，並利用 $x_1+x_2+x_3=3\bar{x}$ 及 $y_1+y_2+y_3=3\bar{y}$，得

$$3x^2-6\bar{x}\,x+3y^2-6\bar{y}\,y+\sum_i(x_i^2+y_i^2)=a^2.$$

這就是軌跡的方程。要看清它是甚麼，把方程除以 3 再配方：

$$(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2=\frac{a^2-\sum_i(x_i^2+y_i^2)+3\bar{x}^2+3\bar{y}^2}{3}.$$

分子可以整理得相當簡潔。由於 $\sum_i x_i=3\bar{x}$，

$$\sum_i(x_i-\bar{x})^2=\sum_i x_i^2-2\bar{x}\cdot 3\bar{x}+3\bar{x}^2=\sum_i x_i^2-3\bar{x}^2,$$

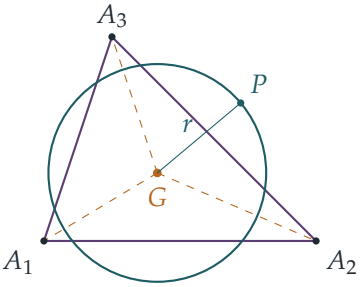
y 的情況亦相同。因此，若記

$$S = \sum_{i=1}^{3}\Big[(x_i - \bar{x})^2 + (y_i - \bar{y})^2\Big]$$

為三點與其形心 $G = (\bar{x}, \bar{y})$ 的距離的平方和，則軌跡為

$$\boxed{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 = \frac{a^2 - S}{3}}.$$

詮釋。當 $a^2 > S$ 時，這是一個圓，圓心是三點的形心 G，半徑為 $\sqrt{(a^2 - S)/3}$。隨着 a^2 變化，我們得到一族以 G 為圓心的同心圓（concentric circles）。在臨界情況 $a^2 = S$ 時，這個「圓」收縮成單獨一點 G。



為何 a^2 不能小於 S

想一想 方框內方程的右邊是負數，這代表甚麼？

左邊 $(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2$ 是實數的平方和，所以永不為負。若 $a^2 < S$，右邊是負數，沒有任何實點 (x, y) 滿足方程：軌跡是空集。因此，要有點能夠按題目所述移動，必須有 $a^2 \geq S$。

把同一番運算倒過來看，會很有啟發。我們實際上證明了的，是以下對任意點 P 均成立的恆等式（identity）：

$$PA_1^2 + PA_2^2 + PA_3^2 = 3\,PG^2 + S.$$

由於 $PG^2 \geq 0$，和 $PA_1^2 + PA_2^2 + PA_3^2$ 必定不小於 S，而等號僅在 $P = G$ 時成立。用文字來說：形心就是令到三點的距離平方和最小的那一點，而最小值為 S。一個比這最小值還要小的常數和 a^2 是不可能的。

驗算

- 取 $A_1 = (0,0)$、$A_2 = (4,0)$、$A_3 = (1,3)$，則 $G = (\frac{5}{3}, 1)$，且 $S = \frac{34}{9} + \frac{58}{9} + \frac{40}{9} = \frac{44}{3}$。在 $P = G$ 時，距離平方和恰好是 $\frac{44}{3} \approx 14.67$；在 $P = (0,0)$ 時，它是 $0 + 16 + 10 =$

26，而 $3PG^2 + S = 3 \cdot \frac{34}{9} + \frac{44}{3} = 26$，與恆等式所預測的一致。

- 另一個有用的形式：$S = \frac{1}{3}\left(A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + A_3A_1^2\right)$。在上述例子中，各邊長的平方為 16、18 和 10，同樣得出 $\frac{44}{3}$。
- 我們以分數作精確運算，在 2000 組隨機抽取的三點上檢驗了這個恆等式，並以數值方法確認了圓上的點給出的和為 a^2，以及該和的最小值為 S，在 G 處取得。

常見錯誤

- 把半徑留作 $\sqrt{\left(a^2 - \sum(x_i^2 + y_i^2)\right)/3 + \bar{x}^2 + \bar{y}^2}$，而沒有認出它可以用 S 表示；這樣一來，最後一部分便很難看得出來。
- 忘記退化情況（degenerate case）$a^2 = S$，此時軌跡是單獨一點，而不是圓。

STEP 之外

恆等式 $\sum PA_i^2 = 3PG^2 + \sum GA_i^2$ 是轉動慣量（moment of inertia）的平行軸定理（parallel axis theorem）的一種形式；在統計學中，它就是把平方和分解為「組間」（between）與「組內」（within）兩部分：平均值正是令離差平方和最小的那個值，而這就是最小二乘法（least squares）擬合之所以行得通的根本原因。在線性代數中，它是喬裝了的畢氏定理（Pythagoras' theorem），因為由 G 到 P 的向量與各離差 $A_i - G$（在適當的意義下）正交（orthogonal），而這些離差之和為零。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）闡述了這種以投影（projection）看待最小二乘法的觀點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。