詳細解答

STEP I 1999，第 14 題

概率與統計 • 條件概率

> **STEP I 1999，第 14 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q14

關鍵思路

這個連續隨機變量（continuous random variable）只是用來引出一個離散（discrete）隨機變量。只要把密度函數（density）化成得 4、3、2、1 分的四個概率，第 (i) 部分就只是一行的期望值（expectation）計算。第 (ii) 部分是條件概率（conditional probability）；由於總分必須剛好等於 3，獲勝的方式寥寥可數，我們可以把它們全部列出。

解答

第 (i) 部分

對於 $0 \le a \le b \le 1$，

$$\mathrm{P}(a \le X < b) = \int_a^b 2x \,\mathrm{d}x = b^2 - a^2.$$

（對連續隨機變量而言，包括或不包括端點並無分別。）設 S 為擲一支飛鏢所得的分數，則

$$\mathrm{P}(S=4) = \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 - 0 = \tfrac{1}{16}, \qquad \mathrm{P}(S=3) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 = \tfrac{3}{16},$$
$$\mathrm{P}(S=2) = \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{5}{16}, \qquad \mathrm{P}(S=1) = 1 - \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 = \tfrac{7}{16}.$$

這四個概率之和為 1，正如所料。留意外圍的環較容易擲中：密度 $2x$ 隨 x 增大，因為離中心愈遠，面積愈大。

所以

$$\mathrm{E}(S) = 4 \cdot \tfrac{1}{16} + 3 \cdot \tfrac{3}{16} + 2 \cdot \tfrac{5}{16} + 1 \cdot \tfrac{7}{16} = \frac{4+9+10+7}{16} = \frac{30}{16} = \frac{15}{8},$$

即為所求。

第 (ii) 部分

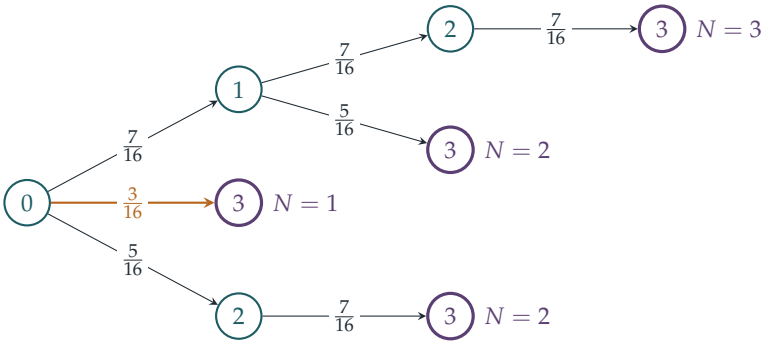
假設各次投擲互相獨立（independent），每次的分數都依從上述 S 的分佈。設 W 為我獲勝的事件，N 為這局遊戲的投擲次數。

想一想 哪些得分序列會導致獲勝？

我獲勝，當且僅當累積總分達到 3 而之前沒有超過它。每次得分至少為 1，所以總分每次至少增加 1，遊戲最多只會擲三次。一局獲勝的遊戲，就是一個由正數得分組成、總和剛好為 3 的序列。（只有當總分低於 3 時我才會再擲，所以每個這樣的序列確實是一局完整的遊戲。）這樣的序列只有四個：

$$(3), \qquad (1,2), \qquad (2,1), \qquad (1,1,1).$$

得分 4 永遠不會出現，因為它會令總分立即超過 3。



樹形圖顯示每條以獲勝告終的路線上的累積總分（獲勝狀態以紫色圓圈標示），箭頭上標示每次投擲的概率。

根據獨立性，每個序列的概率等於其中各個得分的概率之積：

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(W \cap N = 1) &= \mathrm{P}(3) = \tfrac{3}{16} = \tfrac{768}{4096}, \\
\mathrm{P}(W \cap N = 2) &= \mathrm{P}(1,2) + \mathrm{P}(2,1) = 2 \cdot \tfrac{7}{16} \cdot \tfrac{5}{16} = \tfrac{70}{256} = \tfrac{1120}{4096}, \\
\mathrm{P}(W \cap N = 3) &= \mathrm{P}(1,1,1) = \left(\tfrac{7}{16}\right)^3 = \tfrac{343}{4096}.
\end{aligned}$$

這三個事件互斥（disjoint），合起來就是 W，所以

$$\mathrm{P}(W) = \frac{768 + 1120 + 343}{4096} = \frac{2231}{4096}.$$

因此

$$\mathrm{P}(N = 3 \mid W) = \frac{\mathrm{P}(W \cap N = 3)}{\mathrm{P}(W)} = \frac{343/4096}{2231/4096} = \frac{343}{2231},$$

即為所求。

驗算

- 四個得分概率 $\frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{5}{16}, \frac{7}{16}$ 之和為 1。它們都是奇數除以 16，因為 $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$。
- 目標答案中的 $343 = 7^3$ 一看便知，擲三次而獲勝的情況必定是 $(1,1,1)$，這印證了我們的設定。
- 以電腦模擬 10^6 局遊戲，得出 $\mathrm{P}(W) \approx 0.5452$（準確值為 0.5447）及 $\mathrm{P}(N = 3 \mid W) \approx 0.1535$（準確值為 $343/2231 \approx 0.1537$）。

常見錯誤

- 把各個得分區當作等可能。概率來自對密度函數求積分，而不是來自區間的闊度。
- 計算了 $(1,2)$ 卻忘記 $(2,1)$，結果得出 $\mathrm{P}(W) = \frac{1671}{4096}$。
- 答案寫成 $\mathrm{P}(N = 3 \text{ 及} W) = \frac{343}{4096}$，而沒有除以 $\mathrm{P}(W)$。

STEP 之外

第 (ii) 部分其實是一條小型的馬可夫鏈（Markov chain）：狀態就是累積總分，而 3 和「爆分」是吸收態（absorbing states）。目標分數較大時，逐一列出路線便不再可行。這時我們改為以 w_t 表示由總分 t 出發而獲勝的概率，從而得到遞推關係（recurrence）$w_t = \sum_s \mathrm{P}(S = s)\, w_{t+s}$。這種首步分析（first-step analysis）是大學一年級概率論的重要工具。Grimmett 與 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教科書）在討論隨機漫步（random walks）和馬可夫鏈的部分對此有所講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。