詳細解答

STEP I 1999，第 12 題

概率與統計 • 灌鉛骰子的不等式

STEP I 1999，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/99-s1-q12

本題在 *Beyond STEP* 第 9.13 節做了手腳的骰子中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch09/loaded-dice.html

關鍵思路

第一行的不等式（inequality）是整道題的原動力。假如每個總和出現的機會均等，那麼 2 和 12 這兩個「角落」總和各自會迫使某個概率乘積等於 $\frac{1}{11}$，而總和 7 就會包含兩個交叉項，其和的形式為 $c\,(x + x^{-1})$。該不等式令這個和變得太大。第 (ii) 部分是同一個想法換了另一副面貌：當所有項都相等時，平方和最小。

解答

第 (i) 部分

不等式。當 $x > 0$ 時可以取平方根，而

$$x + x^{-1} - 2 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0,$$

所以 $x + x^{-1} \geq 2$，而且只有當 $\sqrt{x} = 1/\sqrt{x}$，即 $x = 1$ 時等號才成立。（等價的做法是：把 $(x-1)^2 \geq 0$ 乘以正數 x^{-1}。）

骰子。設 p_s 為總和等於 s 的概率（probability），其中 $2 \leq s \leq 12$。由於兩顆骰子互相獨立（independent），出現數對（第一顆擲得 i，第二顆擲得 j）的概率是 $q_i r_j$。下面的方格表顯示哪些數對給出我們所需的總和。

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
r_1	2	3	4	5	6	7
r_2	3	4	5	6	7	8
r_3	4	5	6	7	8	9
r_4	5	6	7	8	9	10
r_5	6	7	8	9	10	11
r_6	7	8	9	10	11	12

總和 2：一格
總和 12：一格
總和 7：六格

總和 2 只能來自 $(1,1)$，總和 12 只能來自 $(6,6)$，所以

$$p_2 = q_1 r_1, \qquad p_{12} = q_6 r_6.$$

總和 7 來自六個數對，當中包括 $(1,6)$ 和 $(6,1)$。這六項全部非負，所以

$$p_7 = q_1 r_6 + q_2 r_5 + \cdots + q_6 r_1 \;\geq\; q_1 r_6 + q_6 r_1.$$

現在用反證法（proof by contradiction），假設全部十一個總和出現的機會均等。它們已窮盡所有可能，所以每個總和的概率都是 $\frac{1}{11}$。於是 $q_1 r_1 = \frac{1}{11}$ 及 $q_6 r_6 = \frac{1}{11}$。特別地，q_1, r_1, q_6, r_6 均不為零，所以可以寫成 $r_1 = \dfrac{1}{11 q_1}$ 及 $r_6 = \dfrac{1}{11 q_6}$。代入後，

$$\begin{aligned} p_7 \;\geq\; q_1 r_6 + q_6 r_1 &= \frac{q_1}{11 q_6} + \frac{q_6}{11 q_1} = \frac{1}{11}\left(x + x^{-1}\right), \qquad \text{其中} x = \frac{q_1}{q_6} > 0, \\ &\geq \frac{2}{11} \end{aligned}$$

這是根據剛才證明的不等式。但 $p_7 = \frac{1}{11} < \frac{2}{11}$，矛盾。因此，無論兩顆骰子怎樣灌鉛，總和 $2, 3, \ldots, 12$ 都不可能全部機會均等。

想一想 為甚麼必須指出 q_1 和 q_6 不為零？

我們曾除以 q_1 和 q_6，而不等式 $x + x^{-1} \geq 2$ 需要 $x > 0$。這兩點都有保證，因為乘積 $q_1 r_1$ 和 $q_6 r_6$ 各自等於 $\frac{1}{11} \neq 0$。少了這一步，論證就會有漏洞：一般而言，一顆永遠擲不出 1 的骰子是完全容許的。

第 (ii) 部分

設 S 為第一顆骰子兩次擲得相同點數的事件（event）。兩次投擲互相獨立，所以兩次都擲得 j 的概率是 q_j^2，而這六個事件互不相交（disjoint）。因此

$$\mathrm{P}(S) = q_1^2 + q_2^2 + \cdots + q_6^2.$$

已知 $q_j \geq 0$ 及 $\sum q_j = 1$，我們要求這個值最小可以是多少。把一個量度骰子偏離公平程度的平方和展開：

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{j=1}^{6} \left(q_j - \tfrac{1}{6}\right)^2 &= \sum_{j=1}^{6} q_j^2 - \tfrac{1}{3}\sum_{j=1}^{6} q_j + 6 \cdot \tfrac{1}{36} \\ &= \sum_{j=1}^{6} q_j^2 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6} = \mathrm{P}(S) - \tfrac{1}{6}. \end{aligned}$$

所以 $\mathrm{P}(S) \geq \frac{1}{6}$，而且等號恰好在每個 $q_j = \frac{1}{6}$，即骰子公平時成立。

> **想一想** 1/36 從何而來？為甚麼說它是個煙幕？

$\frac{1}{36}$ 是用公平骰子擲出某一個特定數對（例如一對六）的概率。「兩個點數相同」涵蓋六個這樣的數對，所以對公平骰子來說，其概率是 $6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$，而把骰子灌鉛只會令它增加。

所以答案是**不可能**：無論 q_j 取甚麼值，兩個點數相同的概率至少是 $\frac{1}{6}$，遠大於 $\frac{1}{36}$。

驗算

- 公平骰子：$p_2 = p_{12} = \frac{1}{36}$，但 $p_7 = \frac{6}{36}$，明顯不相等，與結果所預測的一致。
- 以數值方法搜尋 20,000 對隨機灌鉛的骰子，從未出現全部十一個總和的概率與 $\frac{1}{11}$ 相差都在 0.05 以內的情況；用分數作精確檢查，亦證實每次都有 $p_7 \geq q_1 r_6 + q_6 r_1$。
- 對於 $(q_1, \ldots, q_6) = (0.1, 0.2, 0.3, 0.15, 0.15, 0.1)$ 的骰子，我們得到 $\mathrm{P}(S) = 0.195 \geq \frac{1}{6}$；模擬 200,000 次雙擲的結果是 0.194。

常見錯誤

- 假設兩顆骰子完全相同（$q_i = r_i$）。題目容許兩顆骰子的灌鉛方式不同，而上面的論證並不需要兩者一致。
- 寫成 $p_7 = q_1 r_6 + q_6 r_1$。其實還有另外四項；我們只需要一個不等式，所以可以把它們捨去，但要說明原因（$q_i r_j \geq 0$）。
- 在第 (ii) 部分，以 $\sum q_j^2 \geq \frac{1}{36}$ 作答，或者忘記「相同」是指六個結果中的任何一個。

STEP 之外

第 (ii) 部分所說的就是 $\sum q_j^2 \geq \frac{1}{n}\left(\sum q_j\right)^2$，這是柯西－施瓦茲不等式（Cauchy–Schwarz inequality）的特殊情況；$\sum q_j^2$ 這個量稱為*碰撞概率*（collision probability），在信息論（information theory）和雜湊（hashing）的分析中都會出現。第 (i) 部分是關於生成函數（generating function）的經典結果：兩顆骰子總和的概率生成函數（probability generating function）是 $Q(t)R(t)$，而有一個巧妙的另證指出，若總和均勻分佈，$1 + t + \cdots + t^{10}$ 就必須等於一個常數乘以兩個 5 次實係數多項式的積，而這兩個多項式各有一個實根，然而 $1 + t + \cdots + t^{10} = (t^{11} - 1)/(t - 1)$ 卻沒有實根。這類生成函數的理論可參閱 Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教材）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。