詳細解答

STEP I 1999，第 11 題

力學 • 引力作用下的圓周運動

STEP I 1999，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/99-s1-q11

本題在 *Beyond STEP* 第 10.8 節排成三角形的三顆恆星中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch10/three-stars.html

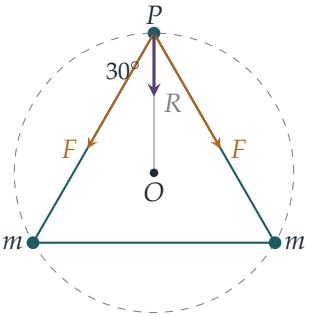
關鍵思路

先猜出運動的形式，再加以檢驗。如果三角形繞着中心作剛性轉動（rigid rotation），每顆星都沿圓周運動，因此它所受的淨力（net force）必須恰好是 $m\omega^2 R$，並且指向中心。根據對稱性，其餘各星對每顆星的引力（gravitational pull）正好指向中心。所以我們只需令這個引力的大小等於 $m\omega^2 R$，便可讀出 ω。在中心放置一顆星，只是多加一個大小已知、指向中心的引力。

解答

我們把各星看成質點（particles），它們只在彼此的引力作用下運動。設 O 為質心（centre of mass）。對三個相等的質量而言，質心就是三角形的形心（centroid），它與每個頂點的距離是

$$R = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$



三顆星

考慮位於頂部頂點的星 P。其餘兩顆星各以大小為

$$F = \frac{\gamma m^2}{a^2},$$

的力吸引它，方向沿着三角形的一條邊。經過 P 的每條邊都與 PO 成 30° 角，因為 PO 平分位於 P 的 60° 角。沿 PO 方向及垂直於 PO 方向分解：

- 在垂直於 PO 的方向，兩個分量大小相等、方向相反，因此互相抵消；
- 在沿 PO 的方向，合力（resultant）為 $2F\cos 30° = \sqrt{3}\,\dfrac{\gamma m^2}{a^2}$，指向 O。

根據對稱性，其餘兩顆星的情況相同。

現在假設三角形以角速度（angular velocity）ω 繞 O 作剛性轉動。於是每顆星都沿半徑為 R 的圓周以恆定速率 $R\omega$ 運動，因此它需要一個指向 O 的加速度 $R\omega^2$。在指向 O 的方向應用牛頓第二定律（Newton's second law），得

$$m\,\frac{a}{\sqrt{3}}\,\omega^2 = \sqrt{3}\,\frac{\gamma m^2}{a^2} \quad\Longrightarrow\quad \omega^2 = \frac{3\gamma m}{a^3}.$$

想一想 為甚麼這樣就證明了這種運動是可能的，而不僅僅是各力在某一瞬間恰好平衡？

讓各星從頂點出發，速度大小為 $R\omega$，方向垂直於 OP，並且全部朝同一方向轉動。只要整個排列仍然是邊長為 a、中心在 O 的等邊三角形，每顆星所受的力，其大小和方向都恰好符合以角速度 ω 作圓周運動的要求。所以這個剛性轉動的三角形，在每一刻都滿足每顆星的運動方程（equation of motion）。因此它是這個系統的一個真正的運動：它就是由這些初始條件（initial conditions）所決定的解。總動量（momentum）為零，所以 O 保持不動，正如所料。因此每顆星都可以以角速度 $(3\gamma m/a^3)^{1/2}$ 繞質心公轉。

在中心加上第四顆星

在 O 放置一顆質量為 λm 的星。質心仍然是 O。外圍三顆星對中心星的引力大小相等，彼此成 120° 角，所以合力為零。因此，只要外圍三顆星保持對稱的排列，中心星便會在 O 保持靜止。

現在每顆外圍星都多受一個指向 O 的引力，大小為

$$\frac{\gamma(\lambda m)m}{R^2} = \frac{3\gamma\lambda m^2}{a^2},$$

這是因為 $R^2 = a^2/3$。這個額外的力沿 PO 作用，所以它只是加在向內的合力之上。指向 O 方向的運動方程變成

$$m\,\frac{a}{\sqrt{3}}\,\omega^2 = \sqrt{3}\,\frac{\gamma m^2}{a^2} + 3\lambda\,\frac{\gamma m^2}{a^2}$$

$$\omega^2 = \frac{3\gamma m}{a^3} + \frac{3\sqrt{3}\,\lambda\gamma m}{a^3} = \frac{3\gamma m}{a^3}\left(1+\sqrt{3}\,\lambda\right).$$

用與先前相同的論證，可知這個剛性轉動是一個真正的運動。所以，當第四顆星靜止於中心時，外圍三顆星可以繞着它公轉，角速度為

$$\omega = \left(\frac{3\gamma m\,(1+\sqrt{3}\,\lambda)}{a^3}\right)^{1/2}.$$

驗算

- 代入 $\lambda = 0$ 便得回第一個答案，這是必然的。
- 量綱（dimensions）：$\gamma m/r^2$ 是加速度，所以 $\gamma m/a^3$ 的單位是 時間$^{-2}$，正好與 ω^2 相符。
- 如果 λ 非常大，外圍各星幾乎感受不到彼此的引力。這時它們只繞着中心的質量運行，有 $\omega^2 \approx \gamma\lambda m/R^3 = 3\sqrt{3}\,\gamma\lambda m/a^3$，與主導項吻合。
- 我們以數值方法對完整的運動方程進行積分（取 $\gamma = m = a = 1$）。從預測的圓周運動速度出發，各星在公轉三周後回到起始位置，相對誤差小於 10^{-7}，對 $\lambda = 0$、1 和 2.5 皆然。例如，$\lambda = 1$ 給出 $\omega^2 = 3(1+\sqrt{3}) \approx 8.196$。

常見錯誤

- 以 a 而不是 $R = a/\sqrt{3}$ 作為圓的半徑，或作為與中心星的距離。
- 把兩個大小為 F 的引力直接相加成 $2F$，忘記了它們與 PO 成 30° 角。
- 忘記說明中心星為何保持不動：作用於它的三個引力互相抵消。

STEP 之外

這是拉格朗日（Lagrange）三體問題（three-body problem）等邊三角形解的一個特殊情況；該解對位於旋轉等邊三角形頂點的任意三個質量都成立。同樣的想法可以得出拉格朗日點（Lagrange points）L_4 和 L_5，特洛伊小行星（Trojan asteroids）就在那裏與木星共用同一軌道。這類排列是否穩定（stable），是一個更深入的問題，要把運動方程在旋轉解附近線性化（linearising）才能解答。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教材）在這個程度上對有心力（central forces）和軌道有嚴謹的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。