詳細解答

STEP I 1999，第 10 題

力學 • 簡諧運動

STEP I 1999，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/99-s1-q10

關鍵思路

質點把彈簧分成兩條彈簧 AP 和 PB，兩者的彈性模量（modulus of elasticity）都與整條彈簧相同，同為 λ（模量是物料本身的性質），但自然長度（natural length）分別是 a 和 b。只用一個坐標，即質點與上端的距離，對每一段寫出虎克定律（Hooke's law），便會發現運動方程（equation of motion）對這個坐標而言是線性的。這個坐標的係數決定了周期（period），我們只需看看它取決於甚麼、不取決於甚麼。

解答

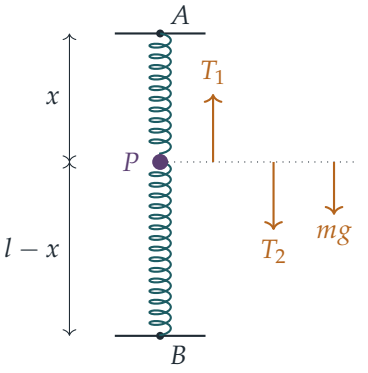
模型

設質點的質量為 m。彈簧是輕的，所以每一段上各處的張力（tension）都相同，而且它在伸長和壓縮時都服從虎克定律（它是彈簧而不是彈性繩，所以既能拉也能推）。先假設 A 是上端。設在時間 t 時質點位於 A 下方距離 x 處，於是 $AP = x$，$PB = l - x$。

由於 AP 的自然長度是 a，PB 的自然長度是 b，由虎克定律得

$$T_1 = \frac{\lambda(x-a)}{a}, \qquad T_2 = \frac{\lambda(l-x-b)}{b},$$

其中 T_1 是 AP 的張力，T_2 是 PB 的張力。張力為正時，該段把質點拉向它的固定端；數值為負則表示該段受壓縮，把質點推開。無論哪種情況，這些公式都給出正確的帶符號的力，所以我們根本不必事先知道哪一段被拉長。



簡諧運動

對質點沿向下方向分解力，作用於它的力有重量 mg、向上的張力 T_1 和向下的張力 T_2：

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg - \frac{\lambda(x-a)}{a} + \frac{\lambda(l-x-b)}{b} \\ &= mg + \lambda - \frac{\lambda x}{a} + \frac{\lambda l}{b} - \frac{\lambda x}{b} - \lambda \\ &= mg + \frac{\lambda l}{b} - \lambda\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)x. \end{aligned}$$

常數 $\pm\lambda$ 互相抵消，右邊是 x 的線性函數，斜率為負。記

$$\omega^2 = \frac{\lambda}{m}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{\lambda(a+b)}{mab}, \qquad x_0 = \frac{mg + \lambda l/b}{\lambda(a+b)/(ab)} = \frac{a(mgb+\lambda l)}{\lambda(a+b)}.$$

於是運動方程變成

$$\ddot{x} = -\omega^2(x - x_0),$$

所以，設 $X = x - x_0$（即相對於平衡位置（equilibrium position）x_0 的位移），便有 $\ddot{X} = -\omega^2 X$。這正是以 $x = x_0$ 為中心的簡諧運動（simple harmonic motion）的方程，周期為

$$\boxed{\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{mab}{\lambda(a+b)}}}$$

這就證明了第一個結果。

想一想 一旦其中一段受到壓縮，運動不就不再是簡諧運動了嗎？

如果是彈性繩，確實如此，因為它的張力公式只在繩被拉長時才成立。彈簧在受壓縮時仍服從同一條虎克定律公式，所以上面那一條方程在整個運動過程中都成立（只要彈簧圈沒有壓至互相緊貼），因此無須限制 l 或振幅（amplitude）。

與 l 及擺放方向無關

長度 l 只在 x_0 中出現：改變 l 會移動振動的中心，但 ω 不變，因而周期也不變。

如果改為 B 在最上方，同樣的推導仍然適用，只是兩段的角色互換：上面一段的自然長度現在是 b，下面一段是 a。這只不過是把 a 和 b 全部對調。周期只透過 ab 和 $a+b$ 取決於 a 和 b，而這兩個式子都是對稱的，所以周期不變。（平衡位置則確實會改變，因為重力現在拉長的是自然長度為 b 的那一段，而不是自然長度為 a 的那一段。）

所以，無論 l 取甚麼值，也無論哪一端在最上方，周期都是 $2\pi\sqrt{mab/(\lambda(a+b))}$，這正是所要證明的。

驗算

- 質量兩側的兩條彈簧相當於並聯（in parallel）：勁度（stiffness）λ/a 和 λ/b 相加得 $\lambda(a+b)/(ab)$，與上面的 ω^2 一致。
- 極限情況 $b \to \infty$：下面一段變得非常弱，我們便回到一個質量掛在一條自然長度為 a 的彈簧上的情形，周期為 $2\pi\sqrt{ma/\lambda}$。
- 單位：λ 是力，所以 ma/λ 的單位是 $\mathrm{kg\,m/N} = \mathrm{s}^2$。
- 數值上，取 $m=1$、$\lambda=50$、$a=1$、$b=2$，公式給出周期 0.72552。對 $l=2$、3 和 4.5（包括兩段都受壓縮的一種情況），並分別以兩端為最上方，用數值方法逐步求解完整的運動方程，所得周期在五位有效數字內相同；另外隨機選取多組常數，結果的相差也都在 10^{-5} 以內。

常見錯誤

- 對各段使用 $\lambda a/(a+b)$ 或類似的模量。每一段的模量仍然是 λ；改變的是勁度 $\lambda/$(自然長度)。
- 弄錯下方張力的符號。被拉長的 PB 把質點向下拉，即拉向 B。
- 忘記論證擺放方向的部分：你需要說明兩端對調就是把 a 和 b 對調，而周期對於它們是對稱的。

STEP 之外

把一個系統拆成若干條彈簧再把勁度相加，是邁向耦合振子（coupled oscillators）的第一步：若彈簧上有多個質量，運動方程便組成一個線性方程組，而可能出現的頻率就是某個矩陣的特徵值（eigenvalues），即所謂「簡正模式」（normal modes）。當質量數

目極多而每個都極小時，取極限便得到彈簧或桿中縱波的波動方程（wave equation）。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教材）討論了振動和簡正模式。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。