詳細解答

STEP I 1999，第 1 題

純數學 • 互質整數的計數

> **STEP I 1999，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q1

關鍵思路

能否被 2 和 5 整除（divisibility）只取決於末位數字，而能否被 3 和 7 整除只取決於模（modulo）21 的餘數（remainder）。因此，我們要找的整數會按固定的規律一段接一段地重複出現，要數它們的個數，只需數出一段中有多少個，再乘以段數。至於平均值，竅門在於對稱（symmetry）：若 n 在集合內，它的「拍檔」$N-n$ 也在集合內，於是這些數便圍繞中點兩兩配對。

解答

第 1 部分：小於一百萬且不能被 2 或 5 整除的整數

「不能被 2 或 5 整除」的意思是兩者都不能整除。一個整數能被 2 或 5 整除，當且僅當它的末位數字是 $0, 2, 4, 5, 6$ 或 8。所以我們要找的是末位數字為 1、3、7 或 9 的整數。

整數 $0, 1, \ldots, 999\,999$ 可分成 100 000 段，每段是十個連續整數 $10k, 10k+1, \ldots, 10k+9$，而每段恰好包含四個我們要找的整數。因此個數為

$$4 \times 100\,000 = 400\,000.$$

（用容斥原理（inclusion–exclusion）也得到相同結果：$10^6 - \frac{1}{2}10^6 - \frac{1}{5}10^6 + \frac{1}{10}10^6 = 400\,000$。）

求平均值時，把每個這樣的 n 與 $10^6 - n$ 配對。若 n 的末位數字是 $1, 3, 7, 9$，則 $10^6 - n$ 的末位數字分別是 $9, 7, 3, 1$，而且因為 $n \neq 0$，所以 $0 < 10^6 - n < 10^6$。因此 $n \mapsto 10^6 - n$ 把這個集合映射到它自身，而且這個映射是它自己的逆映射（inverse）。它沒有不動點（fixed point），因為 $n = 500\,000$ 是偶數。於是這個集合分成 200 000 對，每對之和為

10^6。總和是 $200\,000 \times 10^6$，平均值是

$$\frac{200\,000 \times 10^6}{400\,000} = 500\,000.$$

第 2 部分：小於 4179 且不能被 3 或 7 整除的整數

4179 這個數是精心挑選的：

$$4179 = 3 \times 1393 = 3 \times 7 \times 199 = 21 \times 199.$$

n 能否被 3 或 7 整除，只取決於 n 除以 21 所得的餘數。在餘數 $0, 1, \ldots, 20$ 之中，3 的倍數有 $0, 3, \ldots, 18$（共七個），7 的倍數有 $0, 7, 14$（共三個），其中 0 在兩邊都數了一次。所以有 $21 - 7 - 3 + 1 = 12$ 個餘數不能被兩者中任何一個整除：

$$1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 8,\ 10,\ 11,\ 13,\ 16,\ 17,\ 19,\ 20.$$

整數 $0, 1, \ldots, 4178$ 恰好組成 199 個完整的段，每段長 21，所以個數為

$$12 \times 199 = 2388.$$

作為驗算，用容斥原理：$4179 - 1393 - 597 + 199 = 2388$。

想一想 這裏的數與十進制數字毫無關係，為甚麼對稱的竅門仍然行得通？

關鍵在於 21 整除 4179。於是 $4179 - n \equiv -n \pmod 3$ 以及 $\pmod 7$，所以 $3 \mid 4179 - n$ 當且僅當 $3 \mid n$，對 7 亦然。此外，$n = 0$ 已被排除（它能被任何數整除），所以集合中每個 n 都滿足 $1 \le n \le 4178$，從而亦有 $1 \le 4179 - n \le 4178$。因此 $n \mapsto 4179 - n$ 把這個集合映射到它自身。它沒有不動點，因為 4179 是奇數。於是這 2388 個整數組成 1194 對，每對之和為 4179，平均值是

$$\frac{1194 \times 4179}{2388} = \frac{4179}{2} = 2089\tfrac{1}{2}.$$

驗算

用電腦把所有整數逐一檢查，可確認個數 400 000 和 2388 以及平均值 500 000 和 2089.5 完全正確。你也可以親手驗算一個小例子：在小於 21 的範圍內，上面列出的十二個餘數之和為 $126 = 12 \times \frac{21}{2}$，所以它們的平均值是 $10.5 = \frac{21}{2}$，與配對論證所預測的完全一致。

常見錯誤

- 把「不能被 2 或 5 整除」理解為「不能同時被兩者整除」，即不能被 10 整除。這樣會得出 900 000 個整數。

- 使用容斥原理時，忘記把 21 的倍數（或 10 的倍數）加回去，因為它們被減了兩次。
- 沒有檢查集合是否對稱，就假定平均值必定是範圍的中點。這裏之所以行得通，只因為 10 整除 10^6，而 21 整除 4179。

STEP 之外

在 $1, \ldots, m$ 之中與 m 互質（coprime）的整數的個數，就是歐拉函數（Euler's totient function）$\varphi(m)$。這裏 $\varphi(10) = 4$ 及 $\varphi(21) = 12$，而所求的個數就是 $\varphi(10^6) = 400\,000$ 和 $199\,\varphi(21)$。配對 $n \leftrightarrow m - n$ 說明，當 $m > 2$ 時，與 m 互質的整數之和總是 $\frac{1}{2} m\,\varphi(m)$，這個事實是踏入模 m 整數算術的第一步。想進一步閱讀，達文波特（Davenport）的 *The Higher Arithmetic* 是極佳的入門書。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。