詳細解答

STEP III 1998，第 9 題

力學 • 轉動慣量

STEP III 1998，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/98-s3-q9

關鍵思路

實心圓錐可以看成由一疊薄圓盤堆疊而成，圓盤的半徑隨着與頂點的距離線性增長。只要知道薄圓盤的轉動慣量（moment of inertia）（繞其軸線的，以及繞一條直徑的），便可以用一個積分把各薄片的貢獻加起來。至於第二條軸，我們需要垂直軸定理（perpendicular axis theorem）（把圓盤繞軸線的轉動慣量化為繞直徑的轉動慣量）和平行軸定理（parallel axis theorem）（把該軸平移到頂點）。之後的擺動就是一個複擺（compound pendulum），其周期所需要的正是繞頂點的轉動慣量。

解答

建立薄片

把頂點置於原點，圓錐的軸線沿 z 軸，於是底面就是平面 $z = h$。設 ρ 為（恆定的）密度。在高度 z 處的橫截面是一個圓盤，由相似三角形可知其半徑為

$$r = \frac{az}{h},$$

厚度為 δz 的薄片是一個薄圓盤，質量為 $\delta m = \rho\pi r^2\,\delta z = \rho\pi\dfrac{a^2z^2}{h^2}\,\delta z$。積分得

$$m = \int_0^h \rho\pi\frac{a^2z^2}{h^2}\,\mathrm{d}z = \tfrac{1}{3}\rho\pi a^2 h, \qquad \text{所以} \qquad \rho\pi = \frac{3m}{a^2h}.$$

繞軸線的轉動慣量

質量為 M、半徑為 r 的均勻圓盤，繞其軸線的轉動慣量為 $\frac{1}{2}Mr^2$。（把它分割成半徑為 s、質量為 $\frac{2Ms}{r^2}\,\delta s$ 的圓環；每個圓環的貢獻是其質量的 s^2 倍，而 $\int_0^r \frac{2M}{r^2}s^3\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}Mr^2$。）

圓錐的每一塊薄片的中心都在軸線上，所以各薄片的貢獻可以直接相加：

$$\begin{aligned} I_{\text{軸}} &= \int_0^h \tfrac{1}{2}r^2\,\rho\pi r^2\,\mathrm{d}z = \tfrac{1}{2}\rho\pi\frac{a^4}{h^4}\int_0^h z^4\,\mathrm{d}z = \tfrac{1}{10}\rho\pi a^4 h \\ &= \frac{1}{10}\cdot\frac{3m}{a^2h}\cdot a^4 h = \frac{3}{10}ma^2, \end{aligned}$$

正如所求。

繞過頂點的軸的轉動慣量

我們要用到兩個定理。

- **垂直軸定理**。對於位於某平面內的薄片（lamina），繞一條垂直於該平面的軸的轉動慣量，等於繞平面內任意兩條互相垂直、並與該軸交於同一點的軸的轉動慣量之和。
- **平行軸定理**。若質量為 M 的物體繞一條通過其質心（centre of mass）G 的軸的轉動慣量為 I_G，則它繞一條與之平行、相距 d 的軸的轉動慣量為 $I_G + Md^2$。

對於薄圓盤，由對稱性可知兩條直徑是等價的，所以垂直軸定理給出 $2I_{\text{直徑}} = \frac{1}{2}Mr^2$，即 $I_{\text{直徑}} = \frac{1}{4}Mr^2$。

取過頂點且平行於底面的軸 ℓ（例如沿 x 軸）。在高度 z 處的薄片，其質心在 z 軸上，與 ℓ 相距 z，而它本身平行於 ℓ 的那條直徑正通過該質心。由平行軸定理，這塊薄片的貢獻為 $\left(\frac{1}{4}r^2 + z^2\right)\delta m$。因此

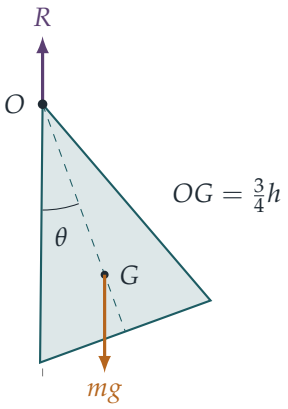
$$\begin{aligned} I_{\text{頂點}} &= \int_0^h \left(\frac{a^2z^2}{4h^2} + z^2\right)\rho\pi\frac{a^2z^2}{h^2}\,\mathrm{d}z = \rho\pi\frac{a^2}{h^2}\left(\frac{a^2}{4h^2}+1\right)\frac{h^5}{5} \\ &= \frac{3m}{a^2h}\cdot\frac{a^2h^3}{5}\cdot\frac{a^2+4h^2}{4h^2} = \frac{3m}{20}\left(a^2+4h^2\right). \end{aligned}$$

想一想 為甚麼不能一次過對整個圓錐應用平行軸定理，由質心平移過去？

其實可以，但我們暫時還不知道繞過 G 的平行軸的轉動慣量；那正是需要計算的東西。分割成薄片就可以避開這一點，因為每個圓盤繞自身直徑的轉動慣量是已知的，而且每個圓盤的中心都在軸線上，與 ℓ 的距離是已知的 z。（順帶可得 $I_G = I_{\text{頂點}} - m\left(\frac{3}{4}h\right)^2 = \frac{3m}{80}(4a^2+h^2)$。）

繞頂點的小幅擺動

把圓錐視為剛體，可繞一條通過其頂點、垂直於運動平面的光滑水平軸自由轉動。這樣的軸平行於底面，所以繞它的轉動慣量就是 $I_{\text{頂點}}$。設 θ 為圓錐軸線與鉛垂向下方向之間的夾角。



軸上的反作用力對 O 沒有力矩，所以唯一的力矩來自重力；重力作用於 G，與 O 相距 $\frac{3}{4}h$。它對 O 的力矩為 $mg \cdot \frac{3}{4}h\sin\theta$，其作用是使 θ 減小。對該軸取力矩，

$$I_{\text{頂點}}\,\ddot{\theta} = -\tfrac{3}{4}mgh\sin\theta.$$

對於小幅擺動，$\sin\theta \approx \theta$，所以

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta, \qquad \omega^2 = \frac{\frac{3}{4}mgh}{\frac{3m}{20}(a^2+4h^2)} = \frac{5gh}{4h^2+a^2}.$$

這是簡諧運動（simple harmonic motion），周期為

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{4h^2+a^2}{5gh}},$$

正如所求。

驗算

- 單位：$\frac{4h^2+a^2}{gh}$ 的單位是 $\mathrm{m}^2/(\mathrm{m\,s^{-2}}\cdot\mathrm{m}) = \mathrm{s}^2$，與周期的平方應有的單位一致。
- 細長圓錐（$a \to 0$）：全部質量都集中在軸線上，而 $\int z^2\,\mathrm{d}m = \frac{3}{5}mh^2$，與 $I_{\text{頂點}} \to \frac{3}{5}mh^2$ 吻合。周期變成 $2\pi\sqrt{4h/(5g)}$，即長度為 $\frac{4}{5}h$ 的單擺（simple pendulum）的周期；這個長度比 $\frac{3}{4}h$ 長，對於質量沿長度方向分佈的物體來說，理應如此。
- 數值驗算：取 $m = 1$、$a = 0.7$、$h = 2.3$，用辛普森法則（Simpson's rule）對薄片求和，以及在圓錐內以蒙地卡羅（Monte Carlo）方法抽樣取點，兩者都得出 $I_{\text{軸}} = 0.147$ 和 $I_{\text{頂點}} \approx 3.2475$，與公式吻合；取 $g = 9.81$，由小振幅出發對 $I\ddot{\theta} = -\frac{3}{4}mgh\sin\theta$ 逐步作數值計算，得出周期為 $2.7525\,\mathrm{s}$，與公式的預測一致。

常見錯誤

- 在第二部分對每塊薄片使用 $\frac{1}{2}r^2\,\delta m$：繞一條平行於底面的軸時，圓盤是繞其直徑轉動的，貢獻為 $\frac{1}{4}r^2\,\delta m$，而不是 $\frac{1}{2}r^2\,\delta m$。
- 由頂點而不是由質心出發應用平行軸定理：只有當兩條軸的其中一條通過質心時，該定理才成立。
- 把圓錐當作長度為 $\frac{3}{4}h$ 的單擺；決定周期的是轉動慣量，而不僅僅是 G 的位置。

STEP 之外

繞過某一點的任意軸的轉動慣量，全部記錄在一個對稱的 3×3 矩陣之中，這個矩陣稱為慣性張量（inertia tensor）；垂直軸定理和平行軸定理，正是它在旋轉和平移下如何變化的特殊情況。它的特徵向量（eigenvectors）稱為主軸（principal axes），可以解釋為甚麼旋轉的物體繞某些軸轉動時穩定，繞另一些軸時卻會搖晃。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）以這個程度講述剛體轉動和複擺。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。