詳細解答

STEP III 1998，第 8 題

純數學 • 球面的向量幾何

> **STEP III 1998，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q8

關鍵思路

這裏的一切都歸結為同一個做法：把「點 $\mathbf{r}$ 位於球面上」寫成純量方程（scalar equation）$|\mathbf{r}-\mathbf{c}|^2 = a^2$，用點積（dot product）展開，然後讀出所需的結果。對於 (i) 中的直線，這樣會得到一個關於 λ 的二次方程，交點的數目由其判別式（discriminant）決定。對於 (ii)，我們需要球心到平面的距離；而對於 (iii)，把兩個球面方程相減，得到的正是「垂直」所問及的那個點積。

解答

第 (i) 部分

點 $\mathbf{b}+\lambda\mathbf{m}$ 位於球面上，當且僅當 $(\mathbf{b}+\lambda\mathbf{m})\cdot(\mathbf{b}+\lambda\mathbf{m}) = a^2$。展開，並利用 $\mathbf{m}\cdot\mathbf{m} = 1$（因為 $\mathbf{m}$ 是單位向量（unit vector））得

$$\lambda^2 + 2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})\lambda + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - a^2 = 0.$$

每一個實根 λ 給出一個交點，而不同的 λ 值給出不同的點（因為 $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$）。所以，有兩個交點當且僅當這個二次方程有兩個相異實根，即其判別式為正：

$$4(\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})^2 - 4(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - a^2) > 0 \iff a^2 > \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})^2,$$

這就是所要求的條件。

當判別式為零時，恰好有一個交點：

$$a^2 = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})^2.$$

這時重根為 $\lambda = -\mathbf{b}\cdot\mathbf{m}$（即 λ 的係數的一半再取負號），所以該點為

$$\mathbf{p} = \mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})\,\mathbf{m}, \qquad \text{而} \qquad \mathbf{m}\cdot\mathbf{p} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{m} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})(\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}) = 0,$$

這裏再次用到 $\mathbf{m}\cdot\mathbf{m} = 1$。所以切線（tangent line）垂直於通往切點的半徑，這正是應有的結果。

第 (ii) 部分

垂直於 $\mathbf{n}$ 的平面，其方程為 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = k$，其中 k 為常數；由於 $\mathbf{n}$ 是單位向量，該平面與原點的距離為 $|k|$。選取 $\mathbf{n}$ 的正負號使 $k \geq 0$（即 $\mathbf{n}$ 由原點指向平面），則平面為

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = l.$$

想一想 球心 $\mathbf{d}$ 與這個平面相距多遠？

由 $\mathbf{d}$ 出發沿法線（normal）方向走：點 $\mathbf{d} + \mu\mathbf{n}$ 位於平面上，當 $\mathbf{d}\cdot\mathbf{n} + \mu = l$，所以 $\mu = l - \mathbf{d}\cdot\mathbf{n}$。這一點就是由 $\mathbf{d}$ 所作垂線的垂足（foot of the perpendicular），所以球心到平面的距離為 $|\mu| = |l - \mathbf{d}\cdot\mathbf{n}|$。

平面與球面相切，當且僅當這個距離等於半徑（距離較小時，平面與球面相交於一個圓；距離較大時，兩者不相交）。所以條件是

$$|\mathbf{d}\cdot\mathbf{n} - l| = a, \qquad \text{等價於} \qquad (\mathbf{d}\cdot\mathbf{n} - l)^2 = a^2,$$

即 $\mathbf{d}\cdot\mathbf{n} = l \pm a$。（若 $\mathbf{n}$ 改為背向平面，則平面的方程為 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = -l$，而條件變成 $|\mathbf{d}\cdot\mathbf{n} + l| = a$。）

第 (iii) 部分

第一個球面的球心為 O，第二個的球心為 D（位置向量（position vector）為 $\mathbf{d}$），兩者半徑均為 a。點 $\mathbf{r}$ 同時位於兩個球面上，當

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = a^2 \qquad \text{及} \qquad (\mathbf{r} - \mathbf{d})\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{d}) = a^2.$$

把第二式展開再減去第一式，得 $-2\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{d} + \mathbf{d}\cdot\mathbf{d} = 0$，所以每一個交點都滿足

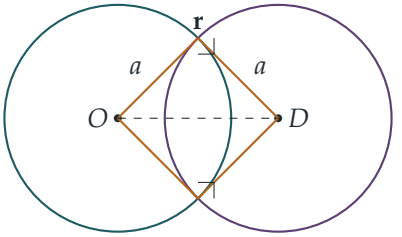
$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{d} = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}.$$

通往點 $\mathbf{r}$ 的兩條半徑是向量 $\mathbf{r}$（由 O 出發）和 $\mathbf{r} - \mathbf{d}$（由 D 出發）。兩者垂直，當

$$\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{d}) = \mathbf{r}\cdot\mathbf{r} - \mathbf{r}\cdot\mathbf{d} = a^2 - \tfrac{1}{2}\,\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}$$

等於零。右邊的式子與我們所選的交點無關，所以若 $\mathbf{d}\cdot\mathbf{d} = 2a^2$，則在每一個交點處兩條半徑都互相垂直，這正是我們要證明的。（這個論證也可以倒過來：只要在其中一個公共點處兩條半徑互相垂直，便有 $\mathbf{d}\cdot\mathbf{d} = 2a^2$。）

在這個情況下，兩個球面確實相交：$|\mathbf{d}| = \sqrt{2}\,a$ 嚴格介乎 0 與 $2a$ 之間，所以兩者相交於一個圓。通過 O 和 D 的截面（cross-section）顯示了其中的直角。



在平面上，兩個半徑為 a 的圓若在公共點處的半徑互相垂直，則 OD 是一個等腰直角三角形的斜邊，所以 $OD^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$：用畢氏定理（Pythagoras' theorem）得到同一答案。

驗算

- 在 (i) 中，取 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$：直線通過球心，條件變成 $a^2 > 0$，而這樣的直線確實總與球面相交於兩點。
- 在 (ii) 中，若球心在原點（$\mathbf{d} = \mathbf{0}$），條件就是 $l = a$：平面與球心的距離為 a 時，便與球面相切。
- 數值上，取 $a = 1$ 及 $|\mathbf{d}| = 1.2$（而非 $\sqrt{2}$），其中一個交點為 $(0.6, 0.8, 0)$，而 $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{d}) = 1 - 0.72 = 0.28 \neq 0$，與 $a^2 - \frac{1}{2}\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}$ 吻合。對全部三個部分所作的隨機測試，結果的誤差均在 10^{-13} 以內。

常見錯誤

- 忘記 $\mathbf{m}\cdot\mathbf{m} = 1$，以致 λ^2 帶着一個不必要的係數。
- 把 (ii) 中的相切條件只寫成 $\mathbf{d}\cdot\mathbf{n} - l = a$：球心可以在平面的任何一側。

STEP 之外

$\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})^2$ 這個量就是 $|\mathbf{b}\times\mathbf{m}|^2$，即原點到直線的距離的平方；而 $\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})\mathbf{m}$ 是 $\mathbf{b}$ 除去 $\mathbf{m}$ 方向分量後的正交投影（orthogonal projection），這個概念正是線性代數（linear algebra）的核心。以直角相交的球面稱為正交（orthogonal）球面，它們在反演幾何（inversive geometry）和雙曲幾何（hyperbolic geometry）的模型中都佔有中心地位。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）講述投影；Needham 的 *Visual Complex Analysis*（複分析的視覺化講解）則展示正交圓的實際應用。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。