詳細解答

STEP III 1998，第 7 題

純數學 • 曲線描繪與積分

STEP III 1998，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/98-s3-q7

關鍵思路

第一個函數並非隨意安排的熱身題：把 $\mathrm{b}(x)$ 求導並令導數為零時，所得的方程正好是 $\mathrm{f}(x/T)=0$。因此，我們對 f 的一切認識（只有一個正根，且位於 2 與 3 之間）都告訴我們 b 在何處轉向。至於 B 如何依賴 T，則來自自然的代換（substitution）$x=Tu$，它把 T 從被積函數（integrand）中抽走。

解答

繪畫 f 的草圖並求 m

我們有 $\mathrm{f}(0)=1\cdot(-3)+3=0$，而且

$$\mathrm{f}'(s)=\mathrm{e}^s(s-3)+\mathrm{e}^s=\mathrm{e}^s(s-2).$$

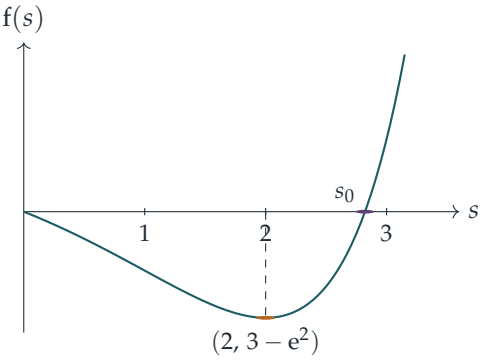
由於 $\mathrm{e}^s>0$，f 在 $[0,2]$ 上遞減，在 $[2,\infty)$ 上遞增，並有極小值 $\mathrm{f}(2)=3-\mathrm{e}^2\approx 3-7.29=-4.29$。當 $s\to\infty$ 時，$\mathrm{e}^s(s-3)\to\infty$，所以 $\mathrm{f}(s)\to\infty$。

因為 $\mathrm{f}(0)=0$ 且 f 在 $[0,2]$ 上嚴格遞減（strictly decreasing），所以當 $0<s\le 2$ 時 $\mathrm{f}(s)<0$。在 $[2,\infty)$ 上，它由一個負值嚴格遞增至 $+\infty$，故此在該處恰好穿過零一次，設在某個 $s_0>2$。因此 s_0 是 f 唯一的正根。

取 $\mathrm{e}\approx 2.7$：

$$\mathrm{f}(1)=3-2\mathrm{e}\approx -2.4,\qquad \mathrm{f}(2)\approx -4.29,\qquad \mathrm{f}(3)=0+3=3.$$

所以滿足 $\mathrm{f}(m)>0$ 的最小正整數是 $m=3$，而且 $2<s_0<3$（事實上 $s_0\approx 2.82$）。



b 的唯一轉向點

設 $u = x/T$。根據商法則（quotient rule），

$$\mathrm{b}'(x) = \frac{3x^2(\mathrm{e}^{x/T}-1) - x^3\cdot\frac{1}{T}\mathrm{e}^{x/T}}{(\mathrm{e}^{x/T}-1)^2} = \frac{x^2\left(3\mathrm{e}^{u}-3-u\,\mathrm{e}^{u}\right)}{(\mathrm{e}^{u}-1)^2} = -\frac{x^2\,\mathrm{f}(u)}{(\mathrm{e}^{u}-1)^2}.$$

當 $x > 0$ 時，我們有 $x^2 > 0$ 及 $(\mathrm{e}^u - 1)^2 > 0$，所以 $\mathrm{b}'(x) = 0$ 當且僅當 $\mathrm{f}(x/T) = 0$。由第一部分可知，這只會在 $x/T = s_0$ 時發生，所以 b 在 $0 < x < \infty$ 內只有一個轉向點（turning point），位於

$$x = s_0 T \approx 2.82\,T.$$

此外，當 $0 < u < s_0$ 時 $\mathrm{f}(u) < 0$，當 $u > s_0$ 時 $\mathrm{f}(u) > 0$，所以在這一點之前 $\mathrm{b}' > 0$，之後 $\mathrm{b}' < 0$：它是一個極大點。

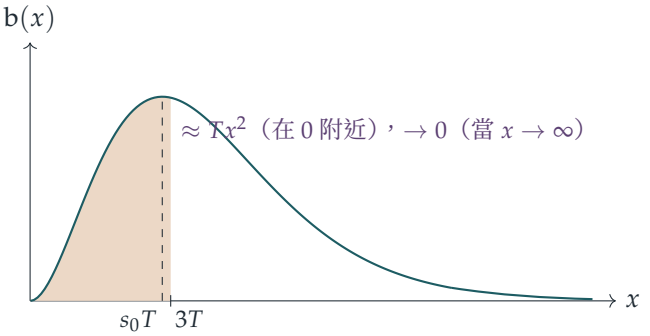
? **想一想** 在 $x = 0$ 附近，分子和分母同時趨於零，b 的圖像是甚麼樣子的？

當 x 很小時，$\mathrm{e}^{x/T} - 1 \approx x/T$，所以

$$\mathrm{b}(x) \approx \frac{x^3}{x/T} = Tx^2,$$

圖像離開原點時形如拋物線，斜率為零。（所以 $\mathrm{b}(0) = 0$ 是自然的取值。）當 x 很大時，指數函數壓倒任何冪函數：$\mathrm{b}(x) \approx x^3\mathrm{e}^{-x/T} \to 0$，所以 x 軸是漸近線（asymptote）。由於對所有 $x > 0$ 都有 $\mathrm{b}(x) > 0$，圖像由原點上升至位於 $x = s_0 T$ 的單一個峯，然後向橫軸衰減。

利用第一部分，峯的高度是 $\mathrm{b}(s_0T) = T^3 s_0^3/(\mathrm{e}^{s_0}-1) \approx 1.42\,T^3$，而 $\mathrm{b}(3T) = 27T^3/(\mathrm{e}^3 - 1)$ 只是略小一點。



（草圖以 $T = 1$ 繪畫；陰影區域是最後一部分所用的區域。）

B 的形式

代入 $x = Tu$，則 $\mathrm{d}x = T\,\mathrm{d}u$，而由於 $T > 0$，積分上下限 $0, \infty$ 不變：

$$B = \int_0^\infty \frac{T^3u^3}{\mathrm{e}^u - 1}\,T\,\mathrm{d}u = T^4\int_0^\infty \frac{u^3}{\mathrm{e}^u - 1}\,\mathrm{d}u.$$

最後這個積分不含 T，所以它是一個常數 K（我們可假設它是有限的）。因此 $B = KT^4$，其中 $n = 4$。

估算 K

用同一個代換，並取 $m = 3$，

$$KT^4 = B \approx 2\int_0^{3T} \mathrm{b}(x)\,\mathrm{d}x = 2T^4\int_0^3 \frac{u^3}{\mathrm{e}^u - 1}\,\mathrm{d}u, \qquad \text{所以} \qquad K \approx 2\int_0^3 \frac{u^3}{\mathrm{e}^u - 1}\,\mathrm{d}u.$$

這是草圖中陰影面積的兩倍（取 $T = 1$）。從圖像讀出高度，並取 $\mathrm{e} \approx 2.7$：

$$\mathrm{b}(0) = 0, \quad \mathrm{b}(1) \approx \frac{1}{1.7} \approx 0.59, \quad \mathrm{b}(2) \approx \frac{8}{6.29} \approx 1.27, \quad \mathrm{b}(3) \approx \frac{27}{18.7} \approx 1.45.$$

以闊度為 1 的長條使用梯形法則（trapezium rule），得

$$\int_0^3 \approx \tfrac{1}{2}(0) + 0.59 + 1.27 + \tfrac{1}{2}(1.45) \approx 2.58,$$

所以

$$K \approx 5.$$

更粗略的估算是把陰影區域當作底為 3、高約 1.45 的三角形，得面積約 2.2，即 $K \approx 4.3$。無論用哪種方法，K 大約是 4 至 5。（三角形的估算必定偏低，因為曲線位於由原點至 $(3, \mathrm{b}(3))$ 的直線之上。）

驗算

- 以數值二分法（bisection）求得 f 的根為 $s_0 \approx 2.8214$；取 $T = 1.7$ 對 b′ 作數值掃描，恰好找到一次變號，位於 $x \approx 4.797 \approx 1.7 s_0$。
- 用辛普森法則（Simpson's rule）計算，當 $T = 0.5$、1 及 2.3 時都得 $B/T^4 \approx 6.4939$：每次的值相同，印證了 $n = 4$。這與已知的精確值 $K = \pi^4/15 \approx 6.494$ 吻合。
- 積分 $\int_0^3 u^3/(\mathrm{e}^u - 1)\,\mathrm{d}u \approx 2.552$，所以題目容許的近似給出 $K \approx 5.10$。我們估算的 5 大致正確。與 6.49 之間的差距，是題目的近似 $B \approx 2\int_0^{3T}$ 本身的誤差，而不是我們計算上的誤差。

常見錯誤

- 忘記 $\mathrm{f}(0) = 0$：$s = 0$ 是 f 的一個根，但它對應 $x = 0$，不在 $0 < x < \infty$ 之內，所以轉向點仍然只有一個。
- 在 B 中作變數代換時，忘記由 $\mathrm{d}x = T\,\mathrm{d}u$ 而來的因子 T，結果得出 $n = 3$。

STEP 之外

函數 b 就是黑體輻射（black-body radiation）的普朗克定律（Planck's law），其中 x 擔當頻率的角色，T 則是溫度。峯的位置 $x = s_0 T$ 是維恩位移定律（Wien's displacement law），而 $B \propto T^4$ 是斯特藩–玻爾茲曼定律（Stefan–Boltzmann law）。精確值 $K = \pi^4/15$ 來自展開式 $1/(\mathrm{e}^u - 1) = \sum_{k\ge 1} \mathrm{e}^{-ku}$，由此得 $K = 6\sum_{k\ge 1} 1/k^4 = 6\zeta(4)$。論證求和與積分可以這樣互換，是典型的大學一年級分析（analysis）題目；可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。