詳細解答

STEP III 1998，第 6 題

純數學 • 多面體的體積

> **STEP III 1998，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q6

關鍵思路

把正方體放在坐標軸上，使它的頂點（vertex）就是坐標全為 0 或 a 的那些點。這樣，距離可由三維的畢氏定理（Pythagoras' theorem）求得，而那些不易處理的立體，則可以從正方體切去簡單的小塊來量度。正四面體（regular tetrahedron）就是正方體切去四個角後剩下的部分，而正八面體（regular octahedron）則是兩個底對底拼合的正方形底角錐（pyramid）。

解答

第 (i) 部分

取正方體 $[0,a]^3$。它的頂點是八個點 (x,y,z)，其中每個坐標為 0 或 a；兩個頂點相鄰（adjacent，即由一條稜（edge）相連）當且僅當它們恰好有一個坐標不同。

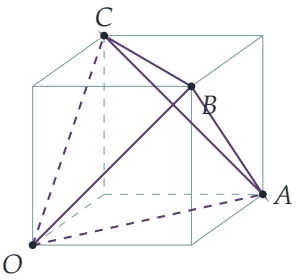
可以選哪四個頂點？按頂點的坐標中有多少個等於 a，把頂點稱為偶頂點或奇頂點。沿一條稜移動會改變一個坐標，所以必定令奇偶互換。假設我們的四個頂點中包括一個偶頂點 P 和一個奇頂點 Q。它們並不相鄰，所以它們有三個坐標不同：Q 就是與 P 相對的頂點。其餘每個頂點都與 P 或 Q 相鄰（三個奇頂點與 P 相鄰，三個偶頂點與 Q 相鄰），所以無法再加入第三個頂點。因此這四個頂點全是偶頂點，

$$O=(0,0,0),\quad A=(a,a,0),\quad B=(a,0,a),\quad C=(0,a,a),$$

或者全是奇頂點（即這組頂點對平面 $x=\frac{1}{2}a$ 的反射，所得的立體與原來的全等（congruent））。

正則性。O,A,B,C 中任意兩點都恰好有兩個坐標不同，每個相差 a，所以六個距離全都

是 $\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}\,a$。因此四個面都是邊長為 $\sqrt{2}\,a$ 的等邊三角形（equilateral triangle），而 $OABC$ 是一個正四面體。它的每條稜都是正方體某一個面的對角線。



體積。從正方體中移走這個四面體，剩下四個角塊，每個奇頂點處各有一個。例如，位於 $(a,0,0)$ 的角塊，就是以該頂點及其三個相鄰頂點 O、A、B 為頂點的四面體。它在 $(a,0,0)$ 處的三條稜互相垂直，長度均為 a，所以它是一個角錐，底是面積為 $\frac{1}{2}a^2$ 的直角三角形，高為 a，體積為 $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a^2\cdot a=\frac{1}{6}a^3$。因此

$$V_{\text{tet}}=a^3-4\cdot\tfrac{1}{6}a^3=\tfrac{1}{3}a^3.$$

要令稜長為單位長度，我們需要 $\sqrt{2}\,a=1$，即 $a=1/\sqrt{2}$ 及 $a^3=1/(2\sqrt{2})$。所以稜長為單位長度的正四面體的體積是

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{6\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{12}.$$

想一想 為甚麼四個角塊和這個四面體恰好填滿正方體，而且互不重疊？

四面體的每個面，例如 OAB，都恰好切去正方體的一個頂點，這裏是 $(a,0,0)$：通過 O、A、B 的平面 $x-y-z=0$ 把 $(a,0,0)$ 嚴格地分在一側，而其餘七個頂點則在另一側或在平面上。所以正方體分成四個角塊（每個面之外各有一個）和位於中間的四面體。

第 (ii) 部分

稜長為單位長度的正八面體，可以把六個頂點放在

$$(\pm h,0,0),\quad (0,\pm h,0),\quad (0,0,\pm h),\qquad h=\tfrac{1}{\sqrt{2}},$$

其中每個頂點都與不和它相對的四個頂點相連。兩個這樣的頂點，例如 $(h,0,0)$ 和 $(0,h,0)$，相距 $\sqrt{2}\,h=1$。所以十二條稜的長度全是 1，而八個面（每個卦限（octant）各有一個）都是等邊三角形。位於平面 $z=0$ 上的四個頂點組成一個邊長為 1 的正方形。這個八面體就是以這個正方形為底的兩個正方形底角錐，頂點為 $(0,0,\pm h)$，高各為 h。因此

$$V_{\text{oct}}=2\cdot\tfrac{1}{3}\cdot 1^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

更一般地，把長度放大 e 倍，體積就放大 e^3 倍，所以稜長為 e 的正八面體的體積是 $\frac{\sqrt{2}}{3}e^3$。

第 (iii) 部分

現在把邊長為 a 的正方體的中心放在原點會較為簡潔，即取 $[-\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a]^3$。它各個面的中心是

$$(\pm\tfrac{1}{2}a, 0, 0), \quad (0, \pm\tfrac{1}{2}a, 0), \quad (0, 0, \pm\tfrac{1}{2}a).$$

這正是第 (ii) 部分的佈局，其中 $h = \frac{1}{2}a$。相對兩面的中心相距 a。相鄰兩面的中心相距 $\sqrt{(\frac{1}{2}a)^2 + (\frac{1}{2}a)^2} = a/\sqrt{2}$。以這六點為頂點的凸（convex）立體有八個面，每個卦限各有一個：例如，在卦限 $x, y, z \geq 0$ 內的面是以 $(\frac{1}{2}a, 0, 0)$、$(0, \frac{1}{2}a, 0)$、$(0, 0, \frac{1}{2}a)$ 為頂點的三角形。每個面都是邊長為 $a/\sqrt{2}$ 的等邊三角形，所以各面的中心組成一個稜長為 $e = a/\sqrt{2}$ 的正八面體。

根據第 (ii) 部分，它的體積是

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{a^3}{2\sqrt{2}} = \frac{a^3}{6}.$$

第 (i) 部分的四面體，其頂點是同一個正方體的其中四個頂點，體積為 $\frac{1}{3}a^3$。由於 $\frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}a^3$，八面體的體積是四面體體積的一半，正如題目所求。

驗算

- 利用「底面積乘高」的公式，以底面積 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 和高 $\sqrt{2/3}$ 計算，得出單位正四面體的體積為 $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{12} \approx 0.11785$，與第 (i) 部分吻合。
- 稜長相等時，$V_{\text{oct}} = 4V_{\text{tet}}$，因為 $\frac{\sqrt{2}}{3} = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12}$。這與一個經典的分割相符：把稜長為 2 的四面體分割成四個稜長為 1 的四面體（在它的四個角）和一個稜長為 1 的八面體（在中間）；以單位四面體為量度單位，就是 $8 = 4 + 4$。
- 數值上，對所有四個互不相鄰的正方體頂點的選法作行列式（determinant）計算，得出單位正方體的情況下體積為 $\frac{1}{3}$；而對區域 $|x| + |y| + |z| \leq 1/\sqrt{2}$ 作蒙地卡羅（Monte Carlo）估算，得出 0.4715，對照 $\sqrt{2}/3 \approx 0.47140$。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分把正方體的邊長取為 1：這時四面體的稜長是 $\sqrt{2}$ 而不是 1，它的體積須按 $(1/\sqrt{2})^3$ 的比例重新縮放。

- 減去錯誤的角塊：角塊共有四個（每個沒有用到的頂點處各有一個），每個體積為 $\frac{1}{6}a^3$，而不是八個。
- 在第 (iii) 部分，把正方體的邊長當作八面體的稜長。相鄰兩面的中心相距 $a/\sqrt{2}$。

STEP 之外

正方體內的兩個四面體，以及由各面中心組成的八面體，是柏拉圖立體（Platonic solids）及其對稱羣（symmetry group）這個故事的開端：正方體的旋轉之中，保持其中一個內接四面體不變的那些旋轉組成一個階為 12 的羣，是正方體全部 24 個旋轉的一半。正方體與八面體互為對偶（dual）（其中一個的各面中心就是另一個的頂點），而這類立體的體積可以由行列式簡潔地求出，因為行列式量度的正是線性映射（linear map）把體積縮放多少。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）把行列式視為體積來處理，而 Armstrong 的 *Groups and Symmetry*（羣與對稱）則研究這些立體的對稱羣。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。