詳細解答

STEP III 1998，第 5 題

純數學 • 矩陣指數

> **STEP III 1998，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q5

關鍵思路

矩陣（matrix）的無窮級數（infinite series）看來嚇人，但這裏兩個矩陣的冪都按非常簡單的規律重複：$\mathbf{M}$ 的冪像 i 的冪一樣循環，而 $\mathbf{N}$ 的冪由平方起全部為零。一旦知道每一個冪，級數便會分拆成熟悉的純量級數（或者乾脆終止），於是可以直接讀出相應的變換（transformation）。最後一部分則是直接的矩陣計算，而它的幾何意義，來自追問每個變換會令哪些直線保持不變。

解答

矩陣 $\mathbf{M}$

乘開，得

$$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbf{I},$$

正如所求。因此，對每個整數 $k \geq 0$，

$$\mathbf{M}^{2k} = (\mathbf{M}^2)^k = (-1)^k\mathbf{I}, \qquad \mathbf{M}^{2k+1} = (-1)^k\mathbf{M}.$$

把級數按 $\theta\mathbf{M}$ 的偶次冪和奇次冪分開，

$$\begin{aligned} \exp(\theta\mathbf{M}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^{2k}}{(2k)!}\mathbf{M}^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}\mathbf{M}^{2k+1} \\ &= \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\theta^{2k}}{(2k)!}\Big)\mathbf{I} + \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}\Big)\mathbf{M} \\ &= \cos\theta\,\mathbf{I} + \sin\theta\,\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

（這樣分拆是合理的，因為矩陣級數的每個元素都是一個實數級數，其各項的大小以 $|\theta|^r/r!$ 為界，所以它絕對收斂（converges absolutely），可以重新組合。）

想一想 我在哪裏見過 $\cos\theta\,\mathbf{I}+\sin\theta\,\mathbf{M}$？

由於 $\mathbf{M}^2 = -\mathbf{I}$，矩陣 $\mathbf{M}$ 的表現與 i 完全一樣，而這個計算正是 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 的矩陣版本。從幾何上看，$\exp(\theta\mathbf{M})$ 把 $(1,0)$ 送到 $(\cos\theta,\sin\theta)$，把 $(0,1)$ 送到 $(-\sin\theta,\cos\theta)$：它是**平面繞原點逆時針旋轉（rotation）角** θ。（事實上 $\mathbf{M}$ 本身就是轉角為 $\frac{\pi}{2}$ 的旋轉，正如乘以 i 一樣。）

矩陣 N

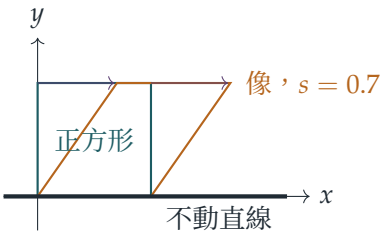
這裏

$$\mathbf{N}^2 = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

所以對所有 $r \geq 2$ 都有 $\mathbf{N}^r = \mathbf{0}$，級數在兩項之後便終止：

$$\exp(s\mathbf{N}) = \mathbf{I} + s\mathbf{N} = \begin{pmatrix}1&s\\0&1\end{pmatrix}.$$

它把 (x,y) 送到 $(x+sy,\,y)$。每一點都平行於 x 軸移動，移動的距離與它的高度 y 成正比；x 軸上的點則完全不動。所以 $\exp(s\mathbf{N})$ 是一個**平行於 x 軸的錯切（shear）**，以 x 軸為其不動點（fixed point）所成的直線，並把單位正方形送到一個面積相同的平行四邊形（行列式（determinant）為 1）。



它們何時可交換？

記 $c = \cos\theta$ 及 $\sigma = \sin\theta$。則

$$\exp(s\mathbf{N})\exp(\theta\mathbf{M}) = \begin{pmatrix}1&s\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c&-\sigma\\\sigma&c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c+s\sigma&-\sigma+sc\\\sigma&c\end{pmatrix},$$

$$\exp(\theta\mathbf{M})\exp(s\mathbf{N}) = \begin{pmatrix}c&-\sigma\\\sigma&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&s\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c&sc-\sigma\\\sigma&s\sigma+c\end{pmatrix}.$$

兩式相減，

$$\exp(s\mathbf{N})\exp(\theta\mathbf{M}) - \exp(\theta\mathbf{M})\exp(s\mathbf{N}) = s\sin\theta\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

這個矩陣對每個 s 都是零矩陣，當且僅當 $\sin\theta = 0$（若 $\sin\theta \neq 0$，取 $s = 1$ 即可）。所以這兩個矩陣對所有 s 都可交換（commute），恰好是在

$$\theta = n\pi, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

的時候。對這些值，$\exp(\theta\mathbf{M}) = (-1)^n\mathbf{I}$，即不是單位矩陣（identity matrix）就是 $-\mathbf{I}$。

想一想 為甚麼與這個錯切可交換的旋轉，必定是半周旋轉或者根本不轉？

設 R 為該旋轉，S 為該錯切（其中 $s \neq 0$），並假設 $SR = RS$。在 x 軸上任取一點 P，則 $S(P) = P$。於是

$$S(R(P)) = R(S(P)) = R(P),$$

所以 $R(P)$ 也是錯切的不動點。但錯切所固定的點只有 x 軸上的點。所以這個旋轉必須把 x 軸映射到它自身，而繞原點的旋轉之中能做到這一點的，只有轉角為 0（恆等變換）或 π（半周旋轉 $(x, y) \mapsto (-x, -y)$）的兩個。反過來，這兩個變換與每一個線性映射（linear map）都可交換，因為它們就是 $\pm\mathbf{I}$：把平面轉半周和對它作錯切，不論先後次序，結果都一樣。任何其他旋轉都會令錯切的不動直線傾斜，所以先錯切後旋轉與先旋轉後錯切會得出不同的結果。

驗算

- 當 $\theta = 0$ 時旋轉矩陣是 $\mathbf{I}$，當 $s = 0$ 時錯切是 $\mathbf{I}$，與級數的要求一致。
- 兩個行列式都是 1（分別為 $\cos^2\theta + \sin^2\theta$ 和 $1 \cdot 1$），旋轉和錯切都保持面積不變，理應如此。
- 數值上，取 $\theta = 1$ 並把級數的首 80 項相加，所得的元素與 $\cos 1 \approx 0.5403$ 和 $\sin 1 \approx 0.8415$ 吻合。取 $\theta = 1$、$s = 1$ 時，交換子（commutator）的對角線元素為 $\pm\sin 1 \approx \pm 0.8415$，與 $s\sin\theta\,\mathrm{diag}(1, -1)$ 吻合。

常見錯誤

- 以為對矩陣也有 $\exp(\mathbf{A})\exp(\mathbf{B}) = \exp(\mathbf{A} + \mathbf{B})$。這條法則需要 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$，而這正是此處不成立的條件，除非 $\sin\theta = 0$。
- 只給出 $\theta = 0$（或 $\theta = 0, \pi$），而沒有給出 π 的所有整數倍。

- 把 $\exp(s\mathbf{N})$ 稱為拉伸（stretch）或放大（enlargement）：它保持面積不變，並且逐點固定 x 軸，這正是它成為錯切的原因。

STEP 之外

矩陣指數（matrix exponential）是*李代數*（*Lie algebra*）與*李羣*（*Lie group*）之間的橋樑：$\mathbf{M}$ 生成旋轉羣，$\mathbf{N}$ 生成錯切羣，而 $\exp(t\mathbf{A})$ 是線性微分方程（linear differential equation）$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ 的解。對於不可交換的矩陣，$\exp(\mathbf{A})\exp(\mathbf{B}) = \exp(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ 不成立，其偏差的程度由交換子 $\mathbf{AB}-\mathbf{BA}$ 來量度，這個想法你在最後一部分已經遇過。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）涵蓋矩陣指數及其在微分方程中的應用。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。