詳細解答

# STEP III 1998，第 4 題

純數學 • 極坐標玫瑰線

> **STEP III 1998，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q4

## 關鍵思路

要理解極坐標曲線（polar curve），方程簡單時最容易的做法是把它化為直角坐標（Cartesian）形式；方程不簡單時，則追蹤 $r$ 的正負號。整道題的關鍵在於以下約定：$r<0$ 的點要畫在相反方向 $\theta+\pi$ 上、與原點距離 $|r|$ 之處。對於 $r=\cos k\theta$，這個約定決定了負的迴圈是落在新的位置（形成新的花瓣），還是疊在已畫好的花瓣之上。

## 解答

**圓** $r=\cos\theta$

兩邊同乘 $r$，並利用 $x=r\cos\theta$、$y=r\sin\theta$、$r^2=x^2+y^2$：

$$\begin{aligned} r^2=r\cos\theta \quad &\Longrightarrow \quad x^2+y^2=x \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

因此曲線上每一點都在圓心為 $(\frac{1}{2},0)$、半徑為 $\frac{1}{2}$ 的圓上。

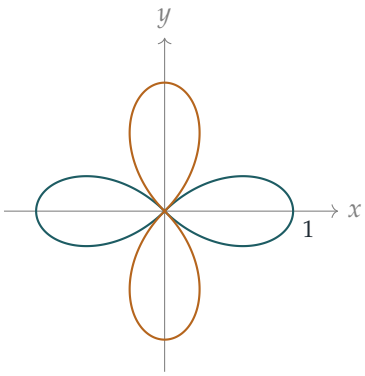
反過來，取這個圓上原點以外的任意一點 $(x,y)$。由於 $x=x^2+y^2>0$，它的極角滿足 $-\frac{1}{2}\pi<\theta<\frac{1}{2}\pi$，而把 $r^2=x=r\cos\theta$ 除以 $r>0$ 便得 $r=\cos\theta$。至於原點，則在 $\theta=\pm\frac{1}{2}\pi$ 時到達。所以這條曲線正正就是這個圓，當 $\theta$ 由 $-\frac{1}{2}\pi$ 走到 $\frac{1}{2}\pi$ 時恰好描畫一次；在這個範圍內始終有 $r=\cos\theta\geq 0$，故此毋須用到正負號的約定。

**曲線** $r=\cos 2\theta$

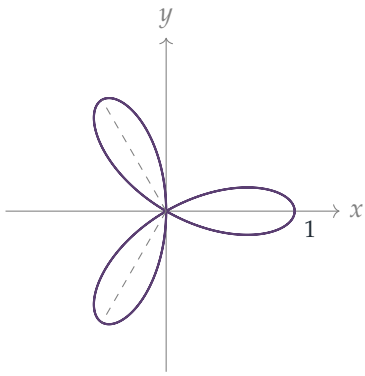
現在 $r$ 會變號，而當 $r<0$ 時，我們把 $(r,\theta)$ 畫在方向 $\theta+\pi$ 上、距離為 $|r|$ 之處。

- 當 $-\frac{1}{4}\pi < \theta < \frac{1}{4}\pi$ 時，$r > 0$，由 0 上升至 $\theta = 0$ 時的 1，再回落到 0：得出一片沿正 $x$ 軸的花瓣。
- 當 $\frac{1}{4}\pi < \theta < \frac{3}{4}\pi$ 時，$r < 0$，所以這些點畫在 $\frac{5}{4}\pi$ 至 $\frac{7}{4}\pi$ 的方向上：得出一片沿負 $y$ 軸的花瓣。
- 同理，$\frac{3}{4}\pi < \theta < \frac{5}{4}\pi$（$r > 0$）給出一片沿負 $x$ 軸的花瓣，而 $\frac{5}{4}\pi < \theta < \frac{7}{4}\pi$（$r < 0$）給出一片沿正 $y$ 軸的花瓣。

結果是一條四葉玫瑰線（four-leaved rose），每片花瓣長度為 1，關於兩條坐標軸都對稱，而且花瓣之間只在原點相接。在草圖中，藍綠色的花瓣來自 $r > 0$，琥珀色的花瓣來自 $r < 0$。




$r = \cos 2\theta$




$r = \cos 3\theta$

**曲線 $r = \cos 2n\theta$**

由於 $\cos(-2n\theta) = \cos 2n\theta$，$n$ 與 $-n$ 給出同一條曲線，所以取 $n \geq 1$（$n = 0$ 的情況稍後再談）。

**想一想** 當 $r < 0$ 時，那些迴圈是疊在已畫好的迴圈之上，還是落在新的位置？

在以 $\theta = k\pi/n = 2k \cdot \frac{\pi}{2n}$（$k = 0, 1, \ldots, 2n-1$）為中心、長度為 $\pi/(2n)$ 的各個區間上，我們有 $r > 0$。每個區間給出一片指向 $2k \cdot \frac{\pi}{2n}$ 方向的花瓣，這個方向是 $\frac{\pi}{2n}$ 的偶數倍。

在以 $\theta = (2k+1)\frac{\pi}{2n}$ 為中心的各個區間上，我們有 $r < 0$，而這些點畫在方向 $\theta + \pi$ 上，所以花瓣指向

$$(2k+1)\frac{\pi}{2n} + \pi = (2k+1+2n)\frac{\pi}{2n},$$

即 $\frac{\pi}{2n}$ 的奇數倍。因此負的迴圈落在新的位置，也就是正花瓣之間的空隙。

所以 $r = \cos 2n\theta$ 是一條有 $4n$ 片全等（congruent）花瓣的玫瑰線，每片花瓣長度為 1，分別指向 $m\pi/(2n)$（$m = 0, 1, \ldots, 4n-1$）的方向，每片花瓣佔的角為 $\pi/(2n)$，而相鄰

的花瓣只在原點相接。（當 $n = 1$ 時，這就是上面的四葉玫瑰線。）各花瓣所佔的角合共為 $4n \cdot \frac{\pi}{2n} = 2\pi$，所以它們剛好填滿一整個周角，互不重疊。

至於退化情況 $n = 0$，曲線是 $r = 1$，即單位圓。

**面積與 $n$ 無關**

由於花瓣互不重疊，當 $\theta$ 由 0 走到 $2\pi$ 時，所圍區域的每一部分都恰好被掃過一次，於是面積公式 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$（它只涉及 $r^2$，所以 $r$ 的正負號並無影響）給出：當 $n \geq 1$ 時，

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 2n\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (1+\cos 4n\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{4}\left[\theta + \frac{\sin 4n\theta}{4n}\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

因為 $\sin 8n\pi = 0$。這個結果與 $n$ 無關，正如題目所求：花瓣愈多，每片花瓣就愈窄，兩者恰好互相抵銷。（被排除的情況 $n = 0$，即單位圓，面積為 $\pi$；公式中 $\sin 4n\theta/(4n)$ 一項正是用到 $n \neq 0$ 的地方。）

**曲線 $r = \cos 3\theta$**

> **想一想** 為甚麼這條曲線有三片花瓣，而不是六片？

現在 $r > 0$ 的區間以 $\theta = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ 為中心，給出指向這些方向的花瓣。負的迴圈以 $\theta = \frac{1}{3}\pi, \pi, \frac{5}{3}\pi$ 為中心，並畫在方向 $\frac{4}{3}\pi$、$2\pi$ 和 $\frac{8}{3}\pi \equiv \frac{2}{3}\pi$ 上：正正就是正花瓣的方向。事實上，把 $\theta$ 換成 $\theta + \pi$，便得到相反方向上的

$$r = \cos(3\theta + 3\pi) = -\cos 3\theta$$

，那是同一點。所以 $r = \cos 3\theta$ 是一條三葉玫瑰線，花瓣長度為 1，沿 $\theta = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ 的方向，每片佔的角為 $\frac{1}{3}\pi$，而當 $\theta$ 由 0 走到 $2\pi$ 時，整條曲線被描畫了兩次（$0 \leq \theta \leq \pi$ 時描畫一次）。這就是上面右邊的草圖。

同樣的論證說明：對任何奇數 $k$，$r = \cos k\theta$ 是一條描畫兩次的 $k$ 葉玫瑰線；而對偶數 $k$，它是一條描畫一次的 $2k$ 葉玫瑰線。

## 驗算

- 在 $r = \cos\theta$ 中代入 $\theta = 0$：點 $(1, 0)$ 在 $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ 上，原點（在 $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$ 時）也在其上。
- 圓 $r = \cos\theta$ 的面積為 $\pi(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\pi$，而 $\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\pi$ 與此吻合。同樣，

對於三葉玫瑰線，$\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos^2 3\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\pi$。若在這裏用 0 至 $2\pi$，便會重複計算，得出 $\frac{1}{2}\pi$。

- 數值驗證：對 $n = 1,\ldots,5$ 繪畫 $r = \cos 2n\theta$，可找到 $4n$ 個花瓣尖端，而以蒙地卡羅方法（Monte Carlo）估算所圍面積，每次都得出 $1.57 \approx \pi/2 = 1.5708$。

## 常見錯誤

- 忽略負的 $r$，結果 $r = \cos 2\theta$ 只畫出兩片花瓣。
- 以為 $r = \cos 3\theta$ 有六片花瓣，理由是 $r$ 有六個迴圈：其實負的迴圈疊在正的迴圈之上。
- 對描畫兩次的曲線（例如 $r = \cos 3\theta$）使用 $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\,\mathrm{d}\theta$，令面積變成兩倍。

## STEP 之外

這些曲線稱為 *rhodonea*，即玫瑰線（rose curve）。把一點寫成複數（complex number）$z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，玫瑰線 $r = \cos k\theta$ 就是 $z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-1)\theta}\right)$，即兩個方向相反的圓周運動之和。這個觀點把玫瑰線與本輪（epicycle）及傅立葉級數（Fourier series）聯繫起來，而面積公式 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$ 則是向量微積分（vector calculus）中格林定理（Green's theorem）的特殊情況。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）把這種以幾何眼光看待複數的方法發揮得淋漓盡致。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。