詳細解答

STEP III 1998，第 3 題

純數學 • 線性遞推關係

> **STEP III 1998，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q3

關鍵思路

這是一個帶常數項的一階線性遞推關係（first-order linear recurrence），可說是微分方程（differential equation）$y' = cy - d$ 的離散版本。處理手法與常微分方程（ODE）相同：先找出常數解（即「平衡」（equilibrium）解），然後留意到與平衡解之間的偏差每天只是乘以同一個因子。至於極限，真正要花工夫的只有一件事：弄清楚 $((1+c)^N - 1)/c$ 在 $c \to 0$ 時的變化，而二項式定理（binomial theorem）正好解決這個問題。

解答

$c > 0$ 時求解

我們嘗試對每個 T 設 $V_T = Ak^T + B$。代入遞推關係，得

$$Ak^{N+1} + B = (1+c)(Ak^N + B) - d \quad \Longleftrightarrow \quad Ak^N(k - (1+c)) = cB - d.$$

右邊與 N 無關，而左邊除非恆為零，否則必隨之變化（我們要求 $A \neq 0$ 及 $k \neq 0$，否則這個形式只是一個常數）。因此對每個 N，兩邊都必須為零：

$$k = 1 + c, \qquad B = \frac{d}{c},$$

這裏可以除以 c，因為 $c > 0$。取這些值後，無論常數 A 是甚麼，$V_T = A(1+c)^T + d/c$ 都滿足遞推關係。代入 $T = 0$ 得 $V_0 = A + d/c$，所以 $A = V_0 - d/c$，於是

$$\boxed{V_N = \left(V_0 - \frac{d}{c}\right)(1+c)^N + \frac{d}{c}}$$

想一想 我們猜了一個形式，結果行得通。但怎樣知道沒有其他解呢？

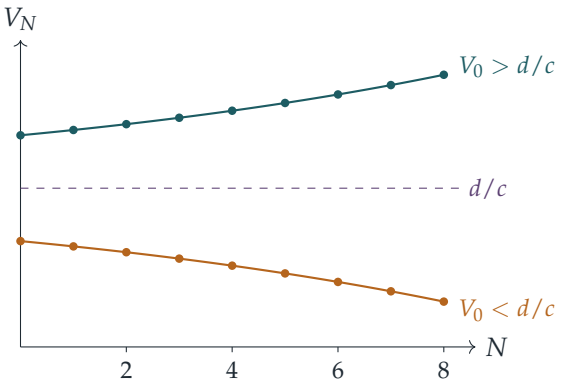
遞推關係由 V_0 決定 V_1，再由 V_1 決定 V_2，如此類推，所以給定 V_0 後，恰好只有一個數列符合條件。我們的公式滿足遞推關係，而且 V_0 的值也正確，所以它就是那個數列。（如果你想要一個直接的論證，可設 $U_N = V_N - d/c$；遞推關係變成 $U_{N+1} = (1+c)U_N$，所以 $U_N = (1+c)^N U_0$，答案相同。）

把答案改寫成以下形式，稍後會很有用：

$$V_N = V_0(1+c)^N - d\,\frac{(1+c)^N - 1}{c}. \qquad (*)$$

這個式子有一個很好的解讀：第一項是 V_0 以每天 c 的比率增長，第二項是 $d(1 + (1+c) + \cdots + (1+c)^{N-1})$，即每天的扣減額各自按餘下的日數增長後，以等比級數（geometric series）求和的結果。

常數 d/c 是平衡值。若 $V_0 > d/c$，債券的價值會無止境地增長；若 $V_0 = d/c$，價值維持不變；若 $V_0 < d/c$，價值會愈跌愈快：



（圖中取 $c = 0.1$ 及 $d/c = 5$，並分別取 $V_0 = 6$ 和 $V_0 = 4$。）

$c = 0$ 的情形

這時遞推關係是 $V_{N+1} = V_N - d$：價值每天減少 d，是一個等差數列（arithmetic progression）。所以

$$\boxed{V_N = V_0 - Nd}$$

留意 $c > 0$ 時的公式不能直接代入 $c = 0$ 求值，因為式中有 d/c；這正是題目要問極限的原因。

$c \to 0$ 時的極限

固定 N，並使用 $(*)$。第一項趨向 V_0，因為對固定的 N 有 $(1+c)^N \to 1$。至於第二項，用二項式定理展開：

$$(1+c)^N - 1 = Nc + \binom{N}{2}c^2 + \cdots + c^N,$$

$$\text{所以} \quad \frac{(1+c)^N - 1}{c} = N + \binom{N}{2}c + \cdots + c^{N-1}.$$

由於 N 是固定的，這是一個關於 c 的多項式，只有有限多項，而且第一項之後的每一項都含有 c 的正數次冪。因此當 $c \to 0$ 時它趨向 N，於是

$$\lim_{c\to 0} V_N = V_0 - Nd,$$

這正是 $c = 0$ 時的解，符合題目要求。（等價地說，$\big((1+c)^N - 1\big)/c$ 是 x^N 在 $x = 1$ 處的差商（difference quotient），所以它的極限就是導數 N。）

「對固定的 N」這幾個字很重要：若 c 很小但 N 很大，像 $\binom{N}{2}c$ 這樣的項不一定小，而指數增長最終會勝過線性變化。

驗算

- $N = 1$：公式給出 $(V_0 - d/c)(1+c) + d/c = (1+c)V_0 - d$，這就是遞推關係本身。
- $V_0 = d/c$ 時，對所有 N 都有 $V_N = d/c$，即平衡狀態。
- 數值上，取 $V_0 = 7$、$d = 2$、$N = 12$：公式在 $c = 0.01$ 時給出 $V_{12} \approx -17.48$，在 $c = 10^{-4}$ 時給出 -17.005，逐漸接近 $V_0 - 12d = -17$。在許多隨機選取的有理數例子中，這個閉合公式也與直接迭代的結果完全吻合。

常見錯誤

- 取 $B = -d/c$：正負號來自 $cB - d = 0$，所以 $B = +d/c$。
- 用 $A = V_0$ 而不是 $A = V_0 - d/c$：常數 B 在 $T = 0$ 時同樣有貢獻。
- 試圖在 $c > 0$ 的公式中直接代入 $c = 0$，但該式此時沒有定義；必須取極限。

STEP 之外

這類遞推關係稱為*線性差分方程*（linear difference equations），其理論與線性常微分方程並行：通解（general solution）等於一個特解（particular solution，這裏是常數解）加

上齊次方程（homogeneous equation）$U_{N+1} = (1+c)U_N$ 的通解。在金融學中，這就是定額還款的貸款或年金（annuity）的公式，而 $c \to 0$ 的極限則是由複利變化過渡到單利變化。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科書）在常微分方程理論之外，另有一節講述一階差分方程。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。