詳細解答

STEP III 1998，第 2 題

純數學 • Beta 積分的遞推關係

> **STEP III 1998，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q2

關鍵思路

這個積分其實是喬裝了的貝塔函數（beta function）。每一部分都只需一個標準手法。第 (i) 部分用反射 $t \mapsto 1-t$，把 t 與 $1-t$ 的角色對調。第 (ii) 部分把被積函數（integrand）乘以 $1 = t + (1-t)$。第 (iii) 部分用分部積分法（integration by parts），把 $(1-t)$ 的一個冪次轉移到 t 上。重複使用第 (iii) 部分，直至 $(1-t)$ 的冪次變成零，剩下的積分便可立即算出。

解答

第 (i) 部分

作代換（substitution）$u = 1-t$，則 $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$，而積分限 $t = 0, 1$ 變成 $u = 1, 0$：

$$\mathrm{I}(a,b) = \int_1^0 (1-u)^a u^b \,(-\mathrm{d}u) = \int_0^1 u^b (1-u)^a \,\mathrm{d}u = \mathrm{I}(b,a).$$

$\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$ 帶來的負號，剛好在把積分限換回 0 和 1 時抵銷。

第 (ii) 部分

由於 $t + (1-t) = 1$，被積函數可以寫成

$$t^a(1-t)^b = t^a(1-t)^b(t + (1-t)) = t^{a+1}(1-t)^b + t^a(1-t)^{b+1}.$$

把每一項在 $[0,1]$ 上積分，便得 $\mathrm{I}(a,b) = \mathrm{I}(a+1,b) + \mathrm{I}(a,b+1)$，正是所求。

第 (iii) 部分

我們對 $\mathrm{I}(a,b)$ 作分部積分，對 $(1-t)^b$ 求導，對 t^a 積分：

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(a,b) &= \left[\frac{t^{a+1}}{a+1}(1-t)^b\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{a+1}}{a+1}\cdot(-b(1-t)^{b-1})\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^{a+1}}{a+1}(1-t)^b\right]_0^1 + \frac{b}{a+1}\int_0^1 t^{a+1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

? **想一想** 為甚麼邊界項（boundary term）會消失？哪裏需要用到 a 和 b 是正數？

在 $t=1$ 處，因為 $b>0$，因子 $(1-t)^b$ 等於 0。在 $t=0$ 處，因為 $a+1>0$，因子 t^{a+1} 等於 0。所以方括號內的項為零，兩邊同乘以 $a+1$ 便得

$$(a+1)\,\mathrm{I}(a,b) = b\,\mathrm{I}(a+1,b-1),$$

這就是所求的結果。（若 $0<b<1$，最後那個積分中 $(1-t)$ 的冪次是負數。但由於 $b-1>-1$，它仍然收斂（converge）。至於下面的整數情形，反正總有 $b-1\geq 0$。）

對整數 a,b 計算 $\mathrm{I}(a,b)$。把結果寫成 $\mathrm{I}(a,b)=\dfrac{b}{a+1}\mathrm{I}(a+1,b-1)$，然後反覆使用。每一步都令第一個參數增加 1，第二個參數減少 1。當第二個參數降至 0 時便停止：

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(a,b) &= \frac{b}{a+1}\mathrm{I}(a+1,b-1) = \frac{b}{a+1}\cdot\frac{b-1}{a+2}\mathrm{I}(a+2,b-2) = \cdots \\ &= \frac{b(b-1)\cdots 1}{(a+1)(a+2)\cdots(a+b)}\mathrm{I}(a+b,0).\end{aligned}$$

每一步都是合理的，因為每次使用公式時，第二個參數都是正整數。現在 $\mathrm{I}(a+b,0)=\int_0^1 t^{a+b}\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{a+b+1}$。另外 $(a+1)(a+2)\cdots(a+b)=\dfrac{(a+b)!}{a!}$，所以

$$\boxed{\mathrm{I}(a,b)=\frac{a!\,b!}{(a+b+1)!}}$$

這條公式對 a 和 b 是對稱的，與第 (i) 部分的要求一致。當 a 或 b 等於 0 時，公式同樣成立。

驗算

- $\mathrm{I}(1,1)=\int_0^1(t-t^2)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，而公式給出 $\frac{1!\,1!}{3!}=\frac{1}{6}$。
- 公式滿足第 (ii) 部分：$\frac{(a+1)!\,b!}{(a+b+2)!}+\frac{a!\,(b+1)!}{(a+b+2)!}=\frac{a!\,b!\,(a+b+2)}{(a+b+2)!}=\frac{a!\,b!}{(a+b+1)!}$。
- 數值方面，用辛普森法則（Simpson's rule）得 $\mathrm{I}(2,3)\approx 0.0166667$，與 $\frac{2!\,3!}{6!}=\frac{1}{60}$ 吻合。我們亦隨機取非整數的 a,b，以數值積分（quadrature）驗算了第 (i) 至 (iii) 部分，結果吻合至約 10^{-11}。

常見錯誤

- 分部積分時把方向弄反。對 t^a 求導會令 $(1-t)$ 的冪次升高，方向錯了。
- 忘記說明邊界項為何消失。它之所以為零，全因 $a+1>0$ 及 $b>0$。
- 遞推（recursion）早了一步停下，或者漏掉來自 $\mathrm{I}(a+b,0)$ 的最後一個因子 $\frac{1}{a+b+1}$。

STEP 之外

$\mathrm{I}(a,b)$ 就是貝塔函數 $B(a+1,b+1)$。對所有正實數參數，它與伽瑪函數（gamma function）有以下關係：$B(x,y)=\Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$。我們的答案正是 $\Gamma(n+1)=n!$ 這個特殊情形。在概率論中，$t^a(1-t)^b/\mathrm{I}(a,b)$ 是貝塔分佈（beta distribution）的密度函數（density），而貝塔分佈在貝葉斯統計學（Bayesian statistics）中佔有核心地位。Blitzstein 與 Hwang 合著的 *Introduction to Probability*（概率論入門）對此有很精彩的論述，當中包括一個計數論證（counting argument），解釋了為甚麼答案是 $a!\,b!/(a+b+1)!$。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。