詳細解答

STEP III 1998，第 13 題

概率與統計 • 最大似然估計

> **STEP III 1998，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q13

關鍵思路

這裏的未知數是 n，而它是整數，所以微積分（calculus）派不上用場：我們無法對 n 求導。要求一個數列（sequence）的最大值，標準的工具是考察相鄰兩項的比值（ratio）。比值大於 1 時數列上升，一旦跌到 1 以下數列便下降；而出現並列的情況（即有兩個最大似然估計，maximum likelihood estimate，簡稱 MLE），正正就是比值在某處等於 1 的時候。

解答

擲一枚公平硬幣（fair coin）n 次，所得正面的次數服從二項分佈（binomial distribution），所以

$$\mathrm{P}(k \text{ 次正面，共擲} n \text{ 次}) = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}, \qquad n \geq k,$$

而若 $n < k$，這個概率是 0。以下一律取 $k \geq 1$（那位朋友至少見過一次正面），所以只有 $n \geq k$ 才是可能的答案。

公平硬幣的一般計算

對 $n \geq k$，記 $L(n) = \binom{n}{k}2^{-n}$，把它看成 k 固定時 n 的函數。對 $n \geq k$，

$$\frac{L(n+1)}{L(n)} = \frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{n+1}{n+1-k} \cdot \frac{1}{2},$$

其中用到 $\binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{n+1-k}\binom{n}{k}$。由於 $n+1-k > 0$，我們可以消去分母而無須改變不等號的方向：

$$\frac{L(n+1)}{L(n)} \geq 1 \iff n+1 \geq 2(n+1-k) \iff n \leq 2k-1,$$

等號恰好在 $n = 2k-1$ 時成立。因此

$$L(k) < L(k+1) < \cdots < L(2k-1) = L(2k) > L(2k+1) > L(2k+2) > \cdots .$$

想一想 比值怎樣告訴我們最大值在哪裏？

當 $n < 2k-1$ 時，比值大於 1，所以每一項都比前一項大：數列嚴格遞增，直至 $n = 2k-1$。在 $n = 2k-1$ 時，比值恰好是 1，所以 $L(2k) = L(2k-1)$。當 $n > 2k-1$ 時，比值小於 1，數列自此嚴格遞減。因此最大值恰好在兩個 n 的值上取得。

一次正面

取 $k = 1$，兩個 MLE 是 $n = 2k-1 = 1$ 和 $n = 2k = 2$。直接計算，

$$L(1) = \tfrac{1}{2}, \quad L(2) = 2 \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}, \quad L(3) = 3 \cdot \tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{8},$$

而上面的論證表明 $L(n)$ 在 $n = 2$ 之後一直遞減。所以有兩個 MLE，即 1 和 2，正如題目所要求。

k 次正面

根據一般計算，擲硬幣次數的兩個 MLE 是

$$n = 2k-1 \quad \text{及} \quad n = 2k.$$

偏差硬幣

現在設 $0 < p < 1$ 及 $q = 1-p$，於是

$$L(n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \qquad n \geq k.$$

對 $n \geq k$，因子 p^k 互相抵消，並多出一個因子 q：

$$\frac{L(n+1)}{L(n)} = \frac{(n+1)q}{n+1-k}.$$

同樣有 $n+1-k > 0$，所以

$$\frac{L(n+1)}{L(n)} \gtreqless 1 \iff (n+1)(1-p) \gtreqless n+1-k \iff k \gtreqless (n+1)p \iff n+1 \lesseqgtr \frac{k}{p}.$$

因此 L 在 $n+1 < k/p$ 時遞增，在 $n+1 = k/p$ 時持平，而一旦 $n+1 > k/p$ 便遞減。留意 $k/p > k$，因為 $p < 1$，所以轉折點落在 $n \geq k$ 這個範圍之內。

- 若 k/p 不是整數，設 $m = \lfloor k/p \rfloor$。那麼 $n+1 < k/p$ 當且僅當 $n+1 \le m$，所以 $L(k) < \cdots < L(m)$，而 $L(m+1) < L(m)$，其後繼續遞減。此時只有一個 MLE，
$$n = \left\lfloor \frac{k}{p} \right\rfloor.$$
- 若 $k/p = N$ 是整數，則 L 一直遞增至 $L(N-1)$，並有 $L(N) = L(N-1)$，然後遞減。此時有兩個 MLE，
$$n = \frac{k}{p} - 1 \quad \text{及} \quad n = \frac{k}{p}.$$
兩者都不小於 k：由於 N 是整數且 $N > k$，我們有 $N - 1 \ge k$。

所以 MLE 唯一**當且僅當** k/p **不是整數**。對公平硬幣而言，$k/p = 2k$ 總是整數，這就是前面各部分總是得到兩個 MLE，即 $2k-1$ 和 $2k$ 的原因。

驗算

- 答案合乎情理：若有 k 次正面，而每次擲出正面的概率是 p，我們預計大約擲了 k/p 次，而 MLE 正是 k/p 向下取整（若它是整數，則是其左右並列的兩個值）。
- 取 $p = \frac{1}{3}$，$k = 1$，於是 $k/p = 3$。那麼 $L(2) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ 而 $L(3) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$，兩者並列，而 $L(4) = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{27} = \frac{32}{81} < \frac{4}{9}$。
- 我們用電腦以分數精確計算 $L(n)$，並找出取得最大值的位置：公平硬幣取 $k = 1, \ldots, 39$（結果總是 $\{2k-1, 2k\}$），另外還有 924 對 (p,k)，其中 p 是分母不超過 12 的分數，且 $k \le 14$。每一個情況都與上述規則吻合。

常見錯誤

- 對 n 求導。這裏 n 是整數，而若沒有額外的工具，$\binom{n}{k}$ 對其他的 n 值並無定義；比值判別法（ratio test）才是合適的工具。
- 把不等號的方向弄反，或者忘記了正是比值等於 1 才產生第二個 MLE。
- 在所有情況下都答 $\lfloor k/p \rfloor$，而遺漏了 k/p 是整數時的並列情況。

STEP 之外

最大似然法（maximum likelihood）是統計學中最核心的估計方法：選取令觀察所得數據出現的概率最大的參數值。參數通常是連續的，我們會用微積分求對數似然（log-likelihood）的最大值。估計像 n 這樣的整數（即「試驗次數」問題），則是這個做法失效

的經典例子，而本題更顯示 MLE 甚至不一定唯一。Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（概率入門）對二項分佈講解得很好，而 Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率導論）則涵蓋了相關的概率背景知識。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。