詳細解答

STEP III 1998，第 12 題

概率與統計 • 網絡可靠度

> **STEP III 1998，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q12

關鍵思路

道路只有六條，所以道路開通與封閉的組合只有 $2^6 = 64$ 種，而最簡潔的做法是數算壞的組合：即各村莊分裂成若干組、組與組之間無法互通的那些組合。把壞的組合按仍然開通的道路數目分類，數算就變得很短，因為四條村莊之間若有四條或以上的道路開通，網絡（network）絕不可能不連通。

動筆之前先提醒一點：試卷上印出的公式，括號前面是 p^2，但正確的因子是 p^3。印出的版本不可能正確，我們會在「驗算」一節說明。我們要證明的是修正後的結果

$$P = 1 - p^3(6p^3 - 12p^2 + 3p + 4).$$

解答

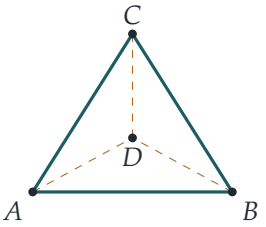
設 $q = 1 - p$ 為某一條道路開通的概率（probability）。由於各條道路的情況互相獨立（independent），任何一個有 k 條道路開通、$6 - k$ 條道路封閉的特定組合，其概率為 $q^k p^{6-k}$。設 D 為網絡不連通（disconnected）這一事件，即有某條村莊無法到達另一條村莊。於是 $P = 1 - \mathbb{P}(D)$，而 $\mathbb{P}(D)$ 就是對所有不連通的組合把 $q^k p^{6-k}$ 加起來的總和。我們按開通道路的數目 k 來數算這些組合。

四條或以上道路開通：絕不會不連通。 如果網絡不連通，各村莊便分裂成至少兩組，組與組之間沒有開通的道路。可能的分法只有 $1 + 3$（一條孤立的村莊加上其餘三條）和 $2 + 2$ 兩種。所有開通的道路都在組內。在 $1 + 3$ 的分法中，三條村莊的那一組只有 3 條道路；在 $2 + 2$ 的分法中，每一對只有 1 條道路，合共 2 條。無論哪一種，最多只能有 3 條道路開通。所以凡是有 $k \geq 4$ 條道路開通的組合都是連通（connected）的。

恰好三條道路開通。

? **想一想** 有三條道路開通時，哪些組合無法把四條村莊全部連接起來？

根據上面的論證，有三條開通道路而又不連通的組合，必定是 $1+3$ 的分法，而且三條村莊那一組之內的三條道路全部開通：即一個三角形，第四條村莊被隔絕。孤立的村莊有 4 種選法，所以這樣的組合有 4 個。（其餘 $\binom{6}{3}-4=16$ 個組合是四面體的生成樹（spanning tree），它們都是連通的。）



開通的道路 AB, BC, CA（實線）；
通往 D 的道路封閉（虛線）：
D 被隔絕

兩條或以下道路開通：必定不連通。 要把四條村莊連接起來，至少需要三條道路（每條道路最多只能把一條新的村莊，接到從 A 出發已能到達的那一組）。所以有兩條道路開通的全部 $\binom{6}{2}=15$ 個組合、有一條開通的全部 6 個，以及完全沒有道路開通的那 1 個，都是不連通的。

加起來。 因此

$$\mathbb{P}(D)=4p^3q^3+15p^4q^2+6p^5q+p^6=p^3\left(4q^3+15pq^2+6p^2q+p^3\right).$$

現在以 $q=1-p$ 展開括號：

$$\begin{aligned}4(1-p)^3&=4-12p+12p^2-4p^3,\\15p(1-p)^2&=15p-30p^2+15p^3,\\6p^2(1-p)&=6p^2-6p^3,\\p^3&=p^3.\end{aligned}$$

相加後，常數項是 4，p 的各項給出 $-12p+15p=3p$，p^2 的各項給出 $12-30+6=-12$，而 p^3 的各項給出 $-4+15-6+1=6$。所以

$$\mathbb{P}(D)=p^3\left(6p^3-12p^2+3p+4\right),\qquad\text{因此}\qquad P=1-p^3\left(6p^3-12p^2+3p+4\right).$$

驗算

- $p=0$（沒有道路會封閉）給出 $P=1$，而 $p=1$ 給出 $P=1-(6-12+3+4)=0$。兩者都正確，但 p^2 的版本同樣滿足這兩點，所以它們無法分辨兩個版本。

- p 很小時就能把兩者區分開來。網絡要不連通，至少要有三條道路封閉（例如連接同一條村莊的那三條），所以當 p 很小時，$\mathbb{P}(D)$ 應該大約是 $4p^3$。我們的公式給出 $\mathbb{P}(D) \approx 4p^3$；印出的公式則會給出 $4p^2$，這是不可能的。
- 當 $p = \frac{1}{3}$ 時，我們的公式給出 $P = 1 - \frac{1}{27} \cdot \frac{105}{27} = \frac{208}{243} \approx 0.856$。用電腦在 21 個 p 值上枚舉全部 64 個組合，結果與 p^3 的公式完全吻合；另外在 $p = 0.4$ 時模擬 200 000 場降雪，得到 0.767，而公式的值是 0.7655。

常見錯誤

- 只數算有孤立村莊的情況，而忘記檢查 $2+2$ 的分法。在這一題它們沒有帶來新的組合：$2+2$ 的分法最多只留下兩條開通的道路，所以那些組合已經包括在「兩條或以下」的數算之中。但你仍然需要把這一點說明。
- 把互相重疊的事件（例如「A 被隔絕」和「B 被隔絕」）的概率直接相加，而沒有修正重疊的部分。以整個組合為單位來數算，就可避免重複計算。
- 相信印出的 p^2，並硬把代數運算湊成那個樣子。如果老老實實算出來的結果與「show that」題目所給的不符，就用一個特殊情況來檢驗。

STEP 之外

這是網絡可靠性（network reliability）的一個小例子：圖（graph）的每條邊各自獨立地失效，而我們想求餘下的圖仍然連通的概率。答案必定是 p 的多項式，其係數數算的是連通生成子圖（connected spanning subgraph）的數目（這裏對應 $6, 5, 4, 3$ 條開通道路的是 $1, 6, 15, 16$）。對於大型的圖，這個多項式在計算上很難求出，並且與 Tutte 多項式（Tutte polynomial）和滲流理論（percolation theory）密切相關。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）是打好概率基礎的好選擇；Bollobás 的 *Modern Graph Theory*（現代圖論）則涵蓋隨機圖（random graph）和 Tutte 多項式。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。