詳細解答

STEP III 1998，第 11 題

力學 • 大振幅擺

> **STEP III 1998，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q11

本題在 *Beyond STEP* 第 11.3 節〈真實的擺〉中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch11/real-pendulum.html

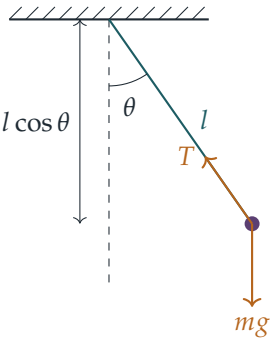
關鍵思路

能量守恆（energy conservation）給出擺在每個角度的角速率（angular speed），而週期（period）等於四分之一次擺動所需時間的四倍，$\int \mathrm{d}t = \int \mathrm{d}\theta/\dot{\theta}$。半角恆等式（half-angle identity）$\cos\theta = 1 - 2\sin^2(\theta/2)$ 把能量方程化成被積函數（integrand）的形式。題目建議的代換（substitution）消去了在 $\theta = \gamma$ 處那個棘手的無窮大，剩下的被積函數形如 $(1-x)^{-1/2}$，其中 x 很小，這正是二項展開式（binomial expansion）大派用場的地方。

解答

能量方程

把擺看成一個質量為 m 的質點，繫在一條長度為 l 的不可伸長輕繩上，在鉛垂平面內擺動，不計空氣阻力。角 θ 由向下的鉛垂線量起。



擺錘（bob）位於支點下方 $l\cos\theta$ 的深度。張力（tension）沿繩的方向作用，與擺錘的速度（沿圓弧方向）垂直，所以張力不作功；只有重力作功，因此機械能（mechanical energy）守恆。擺錘的速率為 $l\dot\theta$。

在最大擺角 $\theta = \gamma$ 處，擺錘瞬時靜止。由該處到一般的角度 θ，擺錘下降的高度為 $l\cos\theta - l\cos\gamma$，所以

$$\tfrac{1}{2}ml^2\dot\theta^2 = mgl(\cos\theta - \cos\gamma) \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{1}{2}l\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = g(\cos\theta - \cos\gamma),$$

這就是第一個結果。

週期

對兩個餘弦都使用 $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2(\alpha/2)$，得

$$\cos\theta - \cos\gamma = 2\big(\sin^2(\gamma/2) - \sin^2(\theta/2)\big),$$

於是能量方程變成

$$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{4g}{l}\big(\sin^2(\gamma/2) - \sin^2(\theta/2)\big).$$

根據對稱性（運動是可逆的，而且能量方程在 $\theta \mapsto -\theta$ 之下不變），四段四分之一擺動 $0 \to \gamma \to 0 \to -\gamma \to 0$ 所需的時間相等。在由 $\theta = 0$ 到 $\theta = \gamma$ 的那四分之一擺動中，θ 遞增，所以取正平方根：

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\,\big(\sin^2(\gamma/2) - \sin^2(\theta/2)\big)^{-1/2}.$$

由 0 積分至 γ，再乘以 4，得

$$P = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^\gamma \big(\sin^2(\gamma/2) - \sin^2(\theta/2)\big)^{-1/2}\,\mathrm{d}\theta,$$

這正是所求。（被積函數在 $\theta = \gamma$ 處趨向無窮大，因為擺錘在該處靜止，但積分是收斂（converge）的；下面的代換會清楚顯示這一點。）

小振幅近似

記 $k=\sin(\gamma/2)$，其中 $0<\gamma<\pi$，因而 $0<k<1$，並設 $\sin(\theta/2)=k\sin\phi$。當 θ 由 0 變到 γ 時，$\sin\phi$ 由 0 變到 1，所以 ϕ 由 0 變到 $\pi/2$。求導後得

$$\tfrac{1}{2}\cos(\theta/2)\,\mathrm{d}\theta = k\cos\phi\,\mathrm{d}\phi.$$

由於 $0\le\theta/2<\pi/2$ 及 $0\le\phi\le\pi/2$，兩個餘弦都非負，所以

$$\cos(\theta/2)=\sqrt{1-k^2\sin^2\phi},\qquad \left(k^2-k^2\sin^2\phi\right)^{1/2}=k\cos\phi.$$

> **想一想** 在這個代換之下，那個麻煩的因子 $(\sin^2(\gamma/2)-\sin^2(\theta/2))^{-1/2}$ 會變成甚麼？

它變成 $1/(k\cos\phi)$，而 $\mathrm{d}\theta$ 中的 $k\cos\phi$ 恰好把它完全約去：

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\left(k^2-\sin^2(\theta/2)\right)^{1/2}}=\frac{1}{k\cos\phi}\cdot\frac{2k\cos\phi\,\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}=\frac{2\,\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}.$$

因此

$$P=4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\left(1-k^2\sin^2\phi\right)^{-1/2}\mathrm{d}\phi,$$

這個積分的被積函數性質十分良好。（到此為止，一切都是精確的。）

當 γ 很小時，$x=k^2\sin^2\phi$ 滿足 $0\le x\le k^2$，而這個上界很小，所以由二項展開式 $(1-x)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\cdots$ 得

$$\left(1-k^2\sin^2\phi\right)^{-1/2}\approx 1+\tfrac{1}{2}k^2\sin^2\phi,$$

誤差的階為 k^4。由於 $\int_0^{\pi/2}\sin^2\phi\,\mathrm{d}\phi=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1-\cos 2\phi)\,\mathrm{d}\phi=\frac{\pi}{4}$，

$$P\approx 4\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k^2}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\right)=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{k^2}{4}\right).$$

最後，當 γ 很小時，$k=\sin(\gamma/2)\approx\gamma/2$（誤差的階為 γ^3），所以 $k^2\approx\gamma^2/4$，只相差階為 γ^4 的項，於是

$$P\approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{\gamma^2}{16}\right),$$

這正是所求。首項是大家熟悉的小幅振盪週期；修正項則說明擺幅愈大，擺動所需的時間略長。

驗算

- 當 $\gamma \to 0$ 時，我們重新得到 $2\pi\sqrt{l/g}$，即由線性化方程 $\ddot{\theta} = -(g/l)\theta$ 所得的週期。
- 量綱（dimensions）：$\sqrt{l/g}$ 是時間，而 γ 是無量綱的。
- 數值上，取 $l/g = 1.7/9.81$ 及 $\gamma = 0.5$，以步長很小的龍格－庫塔（Runge–Kutta）方法逐步求解方程 $\ddot{\theta} = -(g/l)\sin\theta$，得 $P = 2.65705$，與精確的 ϕ 積分在所示的各位數字上完全吻合；近似公式則給出 2.65646，相對誤差約為 2×10^{-4}。該誤差與 γ^4 成比例（約為 $0.0036\gamma^4$），由此確認 γ^2 項是正確的。

常見錯誤

- 忘記因子 4：由 0 到 γ 的積分只是四分之一個週期。
- 在展開之前，就在代換中使用 $\cos(\theta/2) \approx 1$。這樣會丟掉一個 $k^2\sin^2\phi$ 項，而它與你要找的修正項同階；應把 $\sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}$ 保持精確，直到使用二項展開的那一步。
- 停在 $1 + k^2/4$，沒有把 $k = \sin(\gamma/2)$ 換成 $\gamma/2$。

STEP 之外

精確積分 $\int_0^{\pi/2}(1 - k^2\sin^2\phi)^{-1/2}\,\mathrm{d}\phi$ 就是**第一類完全橢圓積分**（complete elliptic integral of the first kind）$K(k)$，所以精確的週期是 $4\sqrt{l/g}\,K(\sin(\gamma/2))$。把二項級數繼續展開下去，可得 $1 + \frac{1}{16}\gamma^2 + \frac{11}{3072}\gamma^4 + \cdots$，而高斯（Gauss）發現，利用算術幾何平均（arithmetic–geometric mean）可以極快地計算 K。週期取決於振幅這一事實，是非線性振盪（nonlinear oscillation）最簡單的例子。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教材）以大學一年級的程度討論了擺與振盪。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。