詳細解答

STEP III 1998，第 10 題

力學 • 斜碰撞

> **STEP III 1998，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q10

關鍵思路

由於兩球質量相等，質量在兩條守恆定律中都可以約去，剩下兩個簡潔的向量關係：速度之和不變，以及速率平方之和不變。比較 $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2$ 與 $|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2$，便可分離出純量積（scalar product）$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$，而整條題目的每一部分都由這一個量帶動。在最後一部分，只要知道第二個球的速度，動量便決定了第一個球的速度，於是能量方程變成只含一個未知速率的二次方程，而有實根的二次方程，其判別式（discriminant）必為非負。

解答

把兩球看作質量同為 m 的光滑球體，在光滑桌面上運動，因此碰撞期間水平方向的力只有兩球互相施加的力。

守恆定律與相對速率

由動量（momentum）和動能（kinetic energy）守恆，得

$$m\mathbf{v}_1+m\mathbf{v}_2=m\mathbf{v}_1'+m\mathbf{v}_2',$$
$$\tfrac{1}{2}m|\mathbf{v}_1|^2+\tfrac{1}{2}m|\mathbf{v}_2|^2=\tfrac{1}{2}m|\mathbf{v}_1'|^2+\tfrac{1}{2}m|\mathbf{v}_2'|^2,$$

即

$$\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_2' \quad (1), \qquad |\mathbf{v}_1|^2+|\mathbf{v}_2|^2=|\mathbf{v}_1'|^2+|\mathbf{v}_2'|^2 \quad (2).$$

把 (1) 的兩邊各自與自身取純量積：

$$|\mathbf{v}_1|^2+|\mathbf{v}_2|^2+2\,\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2=|\mathbf{v}_1'|^2+|\mathbf{v}_2'|^2+2\,\mathbf{v}_1'\cdot\mathbf{v}_2'.$$

減去 (2)，餘下

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{v}_2'. \qquad (3)$$

相對速率（relative speed）的平方是

$$|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2 = |\mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{v}_2|^2 - 2\,\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2,$$

而根據 (2) 和 (3)，右邊每一項在碰撞前後都相同。所以 $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2 = |\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_2'|^2$，又因為速率為非負，故 $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = |\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_2'|$：相對速率守恆。

其中一球起初靜止

設 $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$。則由 (3) 得

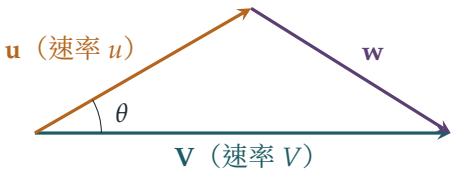
$$\mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{0} = 0.$$

由於碰撞後兩球都在運動，$\mathbf{v}_1' \neq \mathbf{0}$ 且 $\mathbf{v}_2' \neq \mathbf{0}$，所以純量積為零即表示兩個末速度互相垂直。（若沒有這個條件，純量積為零可能只是因為其中一個速度為零，例如正面碰撞（head-on collision）的情況，此時兩球只是互換速度。）

損失能量的碰撞

現在 (1) 仍然成立，但 (2) 不再成立。把靜止的球稱為 A，運動的球稱為 B。設 B 的初速度為 $\mathbf{V}$，其中 $|\mathbf{V}| = V$，末速度為 $\mathbf{u}$，速率為 u，與 $\mathbf{V}$ 成角 θ。設 A 的末速度為 $\mathbf{w}$。

由動量守恆得 $\mathbf{V} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$，所以三個速度構成一個三角形：



因此 $\mathbf{w} = \mathbf{V} - \mathbf{u}$，而由於 $\mathbf{V} \cdot \mathbf{u} = Vu\cos\theta$，

$$|\mathbf{w}|^2 = V^2 - 2Vu\cos\theta + u^2$$

（即三角形中的餘弦定理（cosine rule））。最終動能是初始動能的 $1 - k$ 倍。約去 $\frac{1}{2}m$，

$$u^2 + |\mathbf{w}|^2 = (1-k)V^2 \quad \Longrightarrow \quad 2u^2 - 2Vu\cos\theta + V^2 = (1-k)V^2,$$

所以第二個球的末速率 u 滿足

$$\boxed{2u^2 - 2Vu\cos\theta + kV^2 = 0.}$$

想一想 題目只要求我們證明 $k \le \frac{1}{2}$。我們手上只有一條方程，不等式從何而來？

速率 u 是一個實際出現的實數，所以這條關於 u 的二次方程確實有實根。因此它的判別式必為非負：

$$4V^2\cos^2\theta - 8kV^2 \ge 0 \quad \Longrightarrow \quad k \le \tfrac{1}{2}\cos^2\theta \le \tfrac{1}{2},$$

當中我們除以 $8V^2 > 0$（第二個球在運動），並用了 $\cos^2\theta \le 1$。所以 $k \le \frac{1}{2}$，正是所求。

等號成立需要 $\cos^2\theta = 1$，並且有重根 $u = \frac{1}{2}V\cos\theta$。由於 $u \ge 0$，這表示 $\theta = 0$ 及 $u = \frac{1}{2}V$，於是 $\mathbf{w} = \frac{1}{2}\mathbf{V}$ 亦然：兩球以一半的速率一同離開，這正是完全非彈性（perfectly inelastic）的正面碰撞。動能最多只能損失一半。

驗算

- $k = 0$ 時得 $2u^2 = 2Vu\cos\theta$，所以 $u = V\cos\theta$（或 $u = 0$）。此時 $\mathbf{w} = \mathbf{V} - \mathbf{u}$ 與 $\mathbf{u}$ 垂直，因為 $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{V}-\mathbf{u}) = Vu\cos\theta - u^2 = 0$。這與第二部分吻合。
- 恢復係數（coefficient of restitution）為 e 的正面碰撞給出 $k = \frac{1}{2}(1-e^2)$，其值介乎 0 與 $\frac{1}{2}$ 之間。取 $e = 0.3$，得 $k = 0.455$。
- 數值方面，我們模擬了 10^5 次質量相等的光滑球體的隨機彈性碰撞(elastic collision)。動量、動能、$\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2$ 和相對速率全部吻合，誤差在 10^{-13} 以內。在 2×10^5 個隨機的能量損失結果中，該二次方程成立，誤差在 10^{-14} 以內，而所得最大的 k 為 0.49999。

常見錯誤

- 把「相對速率」當作 $\big||\mathbf{v}_1| - |\mathbf{v}_2|\big|$。它其實是相對速度的大小，即 $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$。
- 在第二部分，忘記使用兩球都在運動這一事實。只有當兩個向量都不是零向量時，純量積為零才表示互相垂直。
- 在最後一部分，再次使用 (2) 或 (3)。它們來自動能守恆，而動能守恆已不再成立。只有動量守恆仍然有效。

STEP 之外

這個純量積論證，其實是一個標準技巧的不依賴參考系的版本：在零動量參考系（zero-momentum frame）中，彈性碰撞只是把兩個速度旋轉，而大小保持不變。最大損失為 $\frac{1}{2}$，反映的是一個普遍事實：只有相對於質心（centre of mass）的動能才可以損失，在這

裏就是 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mV^2$。這些想法通往散射理論（scattering theory），以及狹義相對論（special relativity）中的碰撞。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對質心參考系中的碰撞有仔細的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。