詳細解答

STEP III 1998，第 1 題

純數學 • 曲線描繪

> **STEP III 1998，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q1

關鍵思路

把所有式子都用 $\cos x$ 表示：利用 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$，函數 f 便成為 $\cos x$ 的二次式。配方（completing the square）之後，f 的值域（range）一目了然，而最後一部分正是由這個值域決定。至於 g，用商法則（quotient rule）求得的導數（derivative）是 $\mathrm{f}'(x)$ 的常數倍再除以一個平方。

解答

描繪 $y = \mathrm{f}(x)$ 的圖像

利用 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$，

$$\mathrm{f}(x) = 2 + 2\cos x - \cos^2 x = 3 - (1 - \cos x)^2.$$

由於 $0 \le 1 - \cos x \le 2$，可得 $-1 \le \mathrm{f}(x) \le 3$。當 $\cos x = 1$ 時取得值 3，當 $\cos x = -1$ 時取得值 -1。

求導得

$$\mathrm{f}'(x) = -2(1 - \cos x)\sin x = 2\sin x\,(\cos x - 1).$$

當 $\sin x = 0$ 或 $\cos x = 1$ 時，上式為零；在 $[0, 2\pi]$ 上，即 $x = 0,\ \pi,\ 2\pi$。駐點（stationary point）為

$$(0,\ 3), \qquad (\pi,\ -1), \qquad (2\pi,\ 3).$$

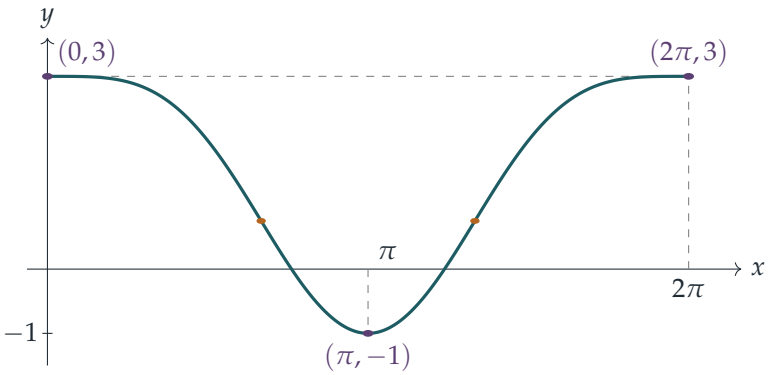
在 $(0, \pi)$ 上，$\sin x > 0$ 而 $\cos x - 1 < 0$，所以 $\mathrm{f}' < 0$，f 遞減。在 $(\pi, 2\pi)$ 上，$\sin x < 0$ 而 $\cos x - 1$ 仍然是負數，所以 $\mathrm{f}' > 0$，f 遞增。因此 $(\pi, -1)$ 是極小點（minimum），而端點 $(0, 3)$ 和 $(2\pi, 3)$ 是極大點（maximum）。

想一想 曲線在 $x = 0$ 附近是甚麼樣子？像拋物線嗎？

不像，它比拋物線更平坦。在 $x = 0$ 附近，$1 - \cos x \approx \frac{1}{2}x^2$，所以 $\mathrm{f}(x) \approx 3 - \frac{1}{4}x^4$。曲線在頂部非常平坦，這與 $\mathrm{f}''(0) = 0$ 吻合。在 $x = \pi$ 附近，設 $x = \pi + t$，則 $1 - \cos x = 1 + \cos t \approx 2 - \frac{1}{2}t^2$，所以 $\mathrm{f} \approx -1 + 2t^2$：這是一個普通的拋物線形極小點。

描繪圖像時還有以下幾個有用的特徵：

- 曲線關於 $x = \pi$ 對稱，因為 $\cos(2\pi - x) = \cos x$。
- 曲線與 x 軸相交於 $(1 - \cos x)^2 = 3$ 之處，即 $\cos x = 1 - \sqrt{3}$。由此得 $x = \arccos(1 - \sqrt{3}) \approx 2.39$ 和 $x = 2\pi - \arccos(1 - \sqrt{3}) \approx 3.89$。
- $\mathrm{f}''(x) = 2\cos 2x - 2\cos x = 2(2\cos x + 1)(\cos x - 1)$。它在 $\cos x = -\frac{1}{2}$ 處變號，所以拐點（point of inflection）位於 $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{3}{4}\right)$ 和 $\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3}{4}\right)$。



琥珀色的點是拐點。

g 的駐點

根據商法則，凡是 $c\,\mathrm{f}(x) + d \neq 0$ 之處，

$$\mathrm{g}'(x) = \frac{a\mathrm{f}'(x)\big(c\mathrm{f}(x) + d\big) - c\mathrm{f}'(x)\big(a\mathrm{f}(x) + b\big)}{\big(c\mathrm{f}(x) + d\big)^2} = \frac{(ad - bc)\,\mathrm{f}'(x)}{\big(c\mathrm{f}(x) + d\big)^2}.$$

由於 $ad \neq bc$，在 g 有定義的每一點上，$\mathrm{g}'(x) = 0$ 當且僅當 $\mathrm{f}'(x) = 0$。所以除了 f 的駐點之外，g 沒有其他駐點。

我們還需要 g 在 $x = 0, \pi, 2\pi$ 處有定義，另外兩個條件正是為此而設。在 $x = 0$ 和 $x = 2\pi$ 處，分母是 $3c + d$，因為 $d \neq -3c$，所以它不等於零。在 $x = \pi$ 處，分母是 $d - c$，因為 $d \neq c$，所以它不等於零。因此 $y = \mathrm{g}(x)$ 的駐點恰好位於 $x = 0,\ \pi,\ 2\pi$，正

如題目所求，並且

$$\mathrm{g}(0) = \mathrm{g}(2\pi) = \frac{3a+b}{3c+d}, \qquad \mathrm{g}(\pi) = \frac{b-a}{d-c}.$$

$|\mathrm{g}|$ 何時有界

假設 $d/c < -3$ 或 $d/c > 1$。特別地，$c \neq 0$，所以可以寫成

$$c\,\mathrm{f}(x) + d = c\left(\mathrm{f}(x) + \frac{d}{c}\right).$$

由於 $\mathrm{f}(x)$ 在 $[-1,3]$ 內取值，括號內的式子落在 $\left[\frac{d}{c} - 1,\ \frac{d}{c} + 3\right]$ 之內。

- 若 $d/c > 1$，括號內的式子至少是 $\frac{d}{c} - 1 > 0$。
- 若 $d/c < -3$，括號內的式子至多是 $\frac{d}{c} + 3 < 0$。

無論哪種情況，都存在常數 $k > 0$，使得對所有 x 都有 $\left|c\,\mathrm{f}(x) + d\right| \geq |c|\,k$。換句話說，分母始終與零保持一段距離。分子是有界（bounded）的，因為 $|a\mathrm{f}(x) + b| \leq 3|a| + |b|$。因此對 $[0, 2\pi]$ 內的每個 x，都有

$$|\mathrm{g}(x)| \leq \frac{3|a| + |b|}{|c|\,k}$$

所以 $|\mathrm{g}(x)|$ 不可能任意大。

> **想一想** 如果 $-3 < d/c < 1$，會出甚麼問題？

這時 $-d/c$ 嚴格介乎 -1 與 3 之間。由於 f 連續（continuous），並且取遍 $[-1,3]$ 內的每一個值，所以存在某個 x 使得 $\mathrm{f}(x) = -d/c$，分母在該處等於零。分子在同一點卻不等於零：假如兩者同時為零，便有 $a(-d/c) + b = 0$，即 $ad = bc$。所以 g 有一條鉛垂漸近線（vertical asymptote），$|\mathrm{g}|$ 無界。由此可見，最後一部分的條件恰到好處，不多也不少。

驗算

- 以數值計算，在 $[0, 2\pi]$ 上取一個細密的網格，f 的最小值是 -1，最大值是 3。此外 $3 - \mathrm{f}(0.1) \approx 2.496 \times 10^{-5}$，而 $\frac{1}{4}(0.1)^4 = 2.5 \times 10^{-5}$，印證了曲線在 $x = 0$ 處的四次平坦性。
- 一個特殊情況：取 $a = 1$、$b = 0$、$c = 0$、$d = 1$，則 $\mathrm{g} = \mathrm{f}$，而公式給出 $\mathrm{g}(0) = 3$ 和 $\mathrm{g}(\pi) = -1$，與預期相符。
- 隨機選取 a, b, c, d，以有限差分（finite difference）計算 g 的導數，結果與 $(ad - bc)\mathrm{f}'/(c\mathrm{f} + d)^2$ 一致。

常見錯誤

- 遺漏端點 $x = 0$ 和 $x = 2\pi$ 這兩個駐點。f′ 在這兩處確實等於零。
- 忘記檢查 g 在 f 的駐點處是否有定義。條件 $d \neq -3c$ 和 $d \neq c$ 正是為此而設。
- 在 $x = 0$ 處把頂部畫成尖削的拋物線形狀。曲線在那裏其實平坦得多。

STEP 之外

當 $ad \neq bc$ 時，映射 $t \mapsto \dfrac{at+b}{ct+d}$ 稱為莫比烏斯變換（*Möbius transformation*）。它是可逆（invertible）的，而且它的導數 $(ad-bc)/(ct+d)^2$ 永不為零，所以與它複合既不會產生新的駐點，也不會令原有的駐點消失。莫比烏斯映射在複分析（complex analysis）和幾何中佔有核心地位，並且在複合運算下構成一個羣（group）。想看一本以圖像為主、賞心悅目的介紹，可參閱 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。