詳細解答

STEP II 1998，第 9 題

力學 • 桁架的靜力學

> **STEP II 1998，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q9

關鍵思路

框架是輕質的（light），所以只有兩個外力作用在它上面：A 處的支承力和 C 處的重量。兩個力要達致平衡（equilibrium），必須大小相等、方向相反，並且沿同一直線作用；這就同時決定了支承力和六邊形的懸掛方式。之後便是節點法（method of joints）：從只有兩枝桿相交的節點入手，分解（resolve）各力，然後沿六邊形逐個節點推進，每次都移到最多只有兩個未知力的節點。

解答

支承力

把六邊形的各邊和三枝對角桿視為輕桿（light rod），在六個頂點處以光滑鉸接（smoothly pinned）相連，並以 W 表示 1 kg 質量的重量，所以 $W = g \approx 9.8\,\mathrm{N}$。各桿都是輕質的，因此作用於整個框架（framework）的外力只有 A 處支承所施的力 $\mathbf{R}$，以及在 C 處鉛垂向下作用的重量 W。

> **想一想** 框架可以隨我們喜歡以任何角度懸掛嗎？

不可以。就整個框架而言，各力之和必須為零，而且總力矩（moment）也必須為零。對 A 取力矩，支承力沒有力矩，所以 C 處的重量對 A 的力矩也必須為零。這只有在 C 位於 A 正下方時才會發生。因此框架懸掛時，短對角線 AC 是鉛垂的，而分解各力可得

$$\mathbf{R} = W \text{ 鉛垂向上}, \qquad |\mathbf{R}| = g \approx 9.8\,\mathrm{N},$$

即 1 kg 的重量，沿 CA 作用。

各桿中的力

取邊長為 1（各力與邊長無關）。當 AC 鉛垂時，B 位於 AC 的一半高度處，在它的一側，而六邊形的其餘部分則在另一側：F 與 A 同高，E 與 B 同高，D 與 C 同高。所以 AF、BE 和 CD 是水平的，邊 AB、BC、DE、EF 與水平線成 $60°$，而短對角線 BD、BF 與水平線成 $30°$。

設 T_{XY} 為桿 XY 中的張力（tension）；在桿的每一端，它都把節點拉向另一端。張力為負，表示該桿受推力（thrust）。

想一想 共有九個未知的桿力。我們應從哪裏入手？

從只有兩枝桿相交的節點入手，因為這樣兩條方程（水平和鉛垂方向）便可以立即解出。節點 C 只連着 CB 和 CD，而且負載就掛在這裏。

節點 C。桿 CB 指向水平線以上 $60°$，而 CD 是水平的，背向 B 的一側。分解各力，

$$\begin{aligned} &\text{鉛垂方向：} \quad T_{BC}\sin 60° = W \;\Rightarrow\; T_{BC} = \tfrac{2W}{\sqrt{3}}, \\ &\text{水平方向：} \quad T_{CD} = T_{BC}\cos 60° = \tfrac{W}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

節點 D。現在只有 DE 和 DB 是未知的。從 D 看，桿 DC 沿水平方向指向 B 的一側，DE 指向水平線以上 $60°$ 並背向該側，而 DB 指向水平線以上 $30°$ 並朝向該側。分解各力，

$$\begin{aligned} &\text{鉛垂方向：} \quad T_{DE}\sin 60° + T_{BD}\sin 30° = 0 \;\Rightarrow\; T_{BD} = -\sqrt{3}\,T_{DE}, \\ &\text{水平方向：} \quad T_{CD} - T_{DE}\cos 60° + T_{BD}\cos 30° = 0 \;\Rightarrow\; T_{CD} - \tfrac{1}{2}T_{DE} - \tfrac{3}{2}T_{DE} = 0, \end{aligned}$$

所以 $T_{DE} = \frac{1}{2}T_{CD} = \frac{W}{2\sqrt{3}}$，而 $T_{BD} = -\frac{W}{2}$。

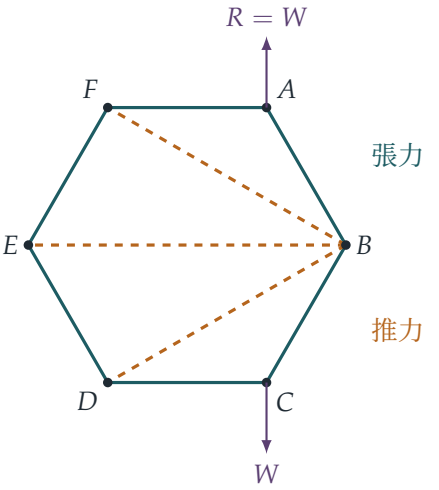
節點 E。桿 ED 指向水平線以下 $60°$，EF 指向水平線以上 $60°$，而 EB 是水平的，三者都朝向 B 的一側。沿鉛垂方向分解，得 $T_{EF} = T_{DE} = \frac{W}{2\sqrt{3}}$。沿水平方向分解，

$$\tfrac{1}{2}T_{DE} + \tfrac{1}{2}T_{EF} + T_{BE} = 0 \;\Rightarrow\; T_{BE} = -\tfrac{W}{2\sqrt{3}}.$$

節點 F。這是節點 D 對直線 BE 的鏡像。沿鉛垂方向分解，$T_{BF} = -\sqrt{3}\,T_{EF} = -\frac{W}{2}$；沿水平方向，$T_{FA} = 2T_{EF} = \frac{W}{\sqrt{3}}$。

節點 A。水平方向，$T_{AB}\cos 60° = T_{FA}$，所以 $T_{AB} = \frac{2W}{\sqrt{3}}$。鉛垂方向，$R = T_{AB}\sin 60° = W$，與第一部分的結果一致。

節點 B 還會給出兩條方程，但它們自動成立：整個框架本身已經處於平衡。驗證這兩條方程，是檢查運算有否出錯的好方法。



總結如下，其中 $W = g$：

- 六條邊全部受張力：AB 和 BC 承受 $\frac{2W}{\sqrt{3}}$，CD 和 FA 承受 $\frac{W}{\sqrt{3}}$，DE 和 EF 承受 $\frac{W}{2\sqrt{3}}$；
- 三枝內桿全部受推力：BD 和 BF 承受 $\frac{W}{2}$，而 BE 承受 $\frac{W}{2\sqrt{3}}$。

所以 BE 中的力是推力，大小為

$$\frac{g}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}g}{6} \approx 2.83\,\text{N}.$$

驗算

- 對稱性：對直線 BE 作反射，會把 $A \leftrightarrow C$ 和 $F \leftrightarrow D$ 互換，並把 A 處向上的力 W 變成 C 處向下的力 W。所以負載是對稱的，答案也應該對稱：$T_{AB} = T_{BC}$，$T_{FA} = T_{CD}$，$T_{EF} = T_{DE}$，$T_{BF} = T_{BD}$。結果確實如此。
- 節點 B：水平方向，兩條邊向一方給出 $2 \cdot \frac{2W}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2}$，而 BD、BF、BE 向另一方給出 $2 \cdot \frac{W}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{W}{2\sqrt{3}} = \frac{2W}{\sqrt{3}}$；鉛垂方向，$AB$ 和 BC 互相抵消，BD 和 BF 亦然。
- 我們取 $g = 9.8$，以數值方法解出全部十二條節點方程：它們互相一致，給出 $R = 9.8\,\text{N}$ 向上，以及 $|T_{BE}| \approx 2.829\,\text{N}$ 的推力；而若 AC 傾斜，方程便無解。

常見錯誤

- 把六邊形畫成有一條邊或一條長對角線是鉛垂的。懸掛位置是被迫確定的：C 在 A 的下方。

- 在不同節點之間混淆正負號的約定。一開始就定下「張力把節點拉向桿的另一端」，然後讓負的答案告訴你哪些桿受推力。

STEP 之外

一個有 j 個節點的框架，當它恰好有 $2j-3$ 枝桿時，便是剛性（rigid）而且靜定（statically determinate）的：這裏 $2\cdot 6-3=9$，這就是為何單靠靜力學便可求出各力。若桿的數目更多，結構便有「冗餘」，這時就需要考慮桿的彈性；這是結構力學的起點，也是圖的剛性理論這門數學的起點。想了解背後的向量力學，可讀 Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力學入門教材）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。