詳細解答

STEP II 1998，第 8 題

純數學 • 向量幾何

> **STEP II 1998，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q8

關鍵思路

這裏的一切，都在於把每條直線寫成「點 + 參數（parameter）× 方向」的形式，然後巧妙地選取參數。各式子對 **a**、**b**、**c** 是對稱（symmetric）的，所以如果某個參數值給出的答案對這三個向量對稱，那麼同一點就位於全部三條直線上。這正是題目中「憑觀察」（by inspection）一語要我們去找的東西。

解答

三條中線（median）交於 R

BC 的中點（mid-point）的位置向量（position vector）為 $\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$，所以由 A 到該中點的直線為

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + s\left(\tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) - \mathbf{a}\right) = (1-s)\mathbf{a} + \tfrac{s}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$

我們希望三個係數相等，使結果對稱：由 $1-s = \frac{s}{2}$ 得 $s = \frac{2}{3}$，而該點為

$$\mathbf{r} = \tfrac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$

由 B 和由 C 出發的直線，可把 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 循環置換而得，而同樣取 $s = \frac{2}{3}$，便在每條直線上得出同一個對稱的點。因此三條直線都通過點 R，其位置向量為

$$\mathbf{r}_R = \tfrac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}),$$

即三角形的形心（centroid）。（由於 A、B、C 構成一個真正的三角形，這些直線中沒有兩條重合，所以 R 是它們唯一的公共點。）

三條平行線交於 Q

設 P 的位置向量為 $\mathbf{p}$。三條直線分別是

$$\begin{aligned}
&\text{通過}BC\text{ 的中點，且平行於}PA: \quad \mathbf{r} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) + \lambda(\mathbf{a}-\mathbf{p}),\\
&\text{通過}CA\text{ 的中點，且平行於}PB: \quad \mathbf{r} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{a}) + \mu(\mathbf{b}-\mathbf{p}),\\
&\text{通過}AB\text{ 的中點，且平行於}PC: \quad \mathbf{r} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) + \nu(\mathbf{c}-\mathbf{p}).
\end{aligned}$$

想一想 λ 取甚麼值，才會使第一個式子對 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 對稱？

在第一條直線中，$\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 的係數各為 $\frac{1}{2}$，而 $\mathbf{a}$ 的係數是 λ；要令它們一致，便需要 $\lambda = \frac{1}{2}$。於是

$$\mathbf{r} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{p}).$$

在另外兩條直線中取 $\mu = \frac{1}{2}$ 和 $\nu = \frac{1}{2}$，得到的是完全相同的向量。因此三條直線都通過點 Q，其中

$$\mathbf{q} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{p}).$$

PQ 與平面 ABC 交於 R

首先，$Q \neq P$：假如 $\mathbf{q} = \mathbf{p}$，則 $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = 3\mathbf{p}$，所以 $\mathbf{p} = \mathbf{r}_R$，$P$ 便會是點 R，而這一點位於平面 ABC 上。所以 PQ 確實是一條直線，即

$$\mathbf{r} = \mathbf{p} + t(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = \mathbf{p} + t\left(\tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) - \tfrac{3}{2}\mathbf{p}\right).$$

要消去含 $\mathbf{p}$ 的項，我們需要 $1 - \frac{3}{2}t = 0$，即 $t = \frac{2}{3}$，這時

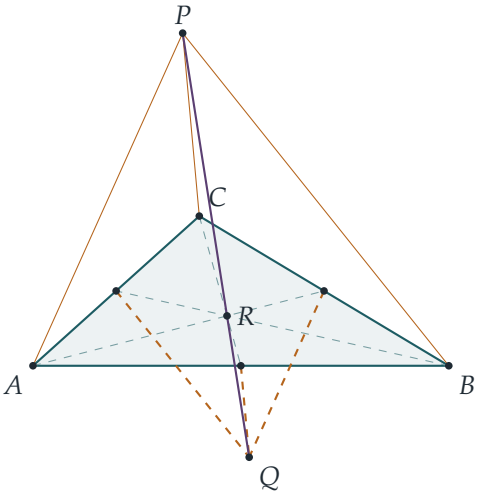
$$\mathbf{r} = \mathbf{p} + \tfrac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) - \mathbf{p} = \tfrac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{r}_R.$$

所以 R 位於直線 PQ 上。它同時位於平面 ABC 上（它在由 A 出發的中線上，而這條中線位於該平面內）。

想一想 PQ 會不會還在別處與這個平面相交？

不會。一條直線與一個平面或者沒有交點，或者恰好有一個交點，或者整條位於平面之內。直線 PQ 並不在平面 ABC 內，因為 P 在這條直線上，而 P 不在該平面上。所以它與平面最多只有一個交點，而這個交點就是 R。這就證明了 PQ 與平面 ABC 交於 R。

額外的收穫是，$t = \frac{2}{3}$ 告訴我們 R 把 PQ 按比 $PR : RQ = 2 : 1$ 分割；等價地，$\mathbf{q} - \mathbf{r}_R = -\frac{1}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{r}_R)$。



驗算

- 每個聲稱的交點都可以代回去檢驗：例如 $\mathbf{q}-\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{p})$，顯然平行於 PA。
- 取 $A=(0,0,0)$、$B=(3,0,0)$、$C=(0,3,0)$ 和 $P=(0,0,3)$，我們得到 $R=(1,1,0)$ 和 $Q=(\frac{3}{2},\frac{3}{2},-\frac{3}{2})$；由 P 到 Q 的三分之二處的點是 $(1,1,0)=R$，位於平面 $z=0$ 上。
- 我們還用精確的有理數運算，對 2000 組隨機選取的 A、B、C、P 檢驗了所有結果：直線 PQ 每次都與平面 ABC 交於 R，參數為 $t=\frac{2}{3}$。

常見錯誤

- 解方程求出其中兩條直線上的公共點後，忘記檢查它是否也在第三條直線上。
- 證明了 R 位於 PQ 上，卻沒有解釋為何它就是 PQ 與平面唯一的交點；「P 不在平面上」這個條件正是用在這裏。

STEP 之外

這個結果背後有一個簡潔的幾何原因。以 R 為中心、比例因子（scale factor）為 $-\frac{1}{2}$ 的放大（enlargement）（即映射 $\mathbf{x}\mapsto\mathbf{r}_R-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{r}_R)$）把 A、B、C 分別送到 BC、CA、AB 的中點，並把任何直線送到與之平行的直線。所以它把交於 P 的直線 PA、PB、PC 變成那三條新直線，因而這三條新直線必定交於 P 的像；這個像就是 Q，而 P、R、Q 共線（collinear），因為放大的中心與每一點及其像都共線。透過變換（仿射映射（affine

map）及其不動點（fixed point））來思考幾何，是大學一年級線性代數（linear algebra）的一個核心思想；Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門教材）是了解這個思想如何展開的好去處。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。