詳細解答

STEP II 1998，第 7 題

純數學 • 以導數證明不等式

> **STEP II 1998，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q7

關鍵思路

每個不等式 (inequality) 的證法都一樣：函數在 $x = 0$ 處為零，而它的導數 (derivative) 為正，所以函數由零開始上升。巧妙之處在於這些函數是環環相扣的。g 的導數原來與 f 有關，而 h 的導數原來就是 g 在 $2x$ 處的值。因此每一部分都為下一部分提供所需的正導數。在第 (iv) 部分，取對數（logarithm）可把商（quotient）F 化為和，而 F'/F 的正負號就是第 (iii) 部分那個式子的正負號。

解答

全題所用的工具是：若 ϕ 可微(differentiable)，$\phi(0) = 0$，且當 $0 < x < a$ 時 $\phi'(x) > 0$，則 ϕ 在 $[0, a)$ 上嚴格遞增（strictly increasing），所以當 $0 < x < a$ 時 $\phi(x) > \phi(0) = 0$。（根據中值定理（mean value theorem），存在某個 $c \in (0, x)$ 使得 $\phi(x) = \phi(x) - \phi(0) = x\,\phi'(c)$，而這是正數。）

第 (i) 部分

我們有 $\mathrm{f}(0) = \tan 0 - 0 = 0$，而且

$$\mathrm{f}'(x) = \sec^2 x - 1 = \tan^2 x.$$

當 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 時，$\tan x$ 有定義且為正，所以 $\mathrm{f}'(x) > 0$。因此當 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 時 $\mathrm{f}(x) > 0$；也就是說，在該範圍內 $\tan x > x$。

第 (ii) 部分

同樣地，$g(0) = 2 - 2 - 0 = 0$。求導，並對 $x \sin x$ 使用積法則（product rule），

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2\sin x - (\sin x + x\cos x) \\ &= \sin x - x\cos x \\ &= \cos x\,(\tan x - x) = \cos x\, f(x). \end{aligned}$$

當 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 時，我們有 $\cos x > 0$，而由第 (i) 部分知 $f(x) > 0$。所以 $g'(x) > 0$，又因為 $g(0) = 0$，可知當 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 時 $g(x) > 0$。

第 (iii) 部分

這次同樣有 $h(0) = 0$。求導，

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2 + \cos 2x - 2x\sin 2x - 3\cos 2x \\ &= 2 - 2\cos 2x - 2x\sin 2x. \end{aligned}$$

想一想 你以前見過這個式子嗎？

它就是把 g 中的 x 換成 $2x$：

$$h'(x) = 2 - 2\cos(2x) - (2x)\sin(2x) = g(2x).$$

若 $0 < x < \frac{1}{4}\pi$，則 $0 < 2x < \frac{1}{2}\pi$，所以由第 (ii) 部分知 $g(2x) > 0$。這就是為甚麼範圍現在是 $\frac{1}{4}\pi$ 而不是 $\frac{1}{2}\pi$。所以在 $0 < x < \frac{1}{4}\pi$ 上 $h'(x) > 0$，再加上 $h(0) = 0$，便得出當 $0 < x < \frac{1}{4}\pi$ 時 $h(x) > 0$。

至於「由此」的部分，用二倍角（double angle）公式改寫題目所給的式子。由於 $\sin^2 x + 3\cos^2 x = 1 + 2\cos^2 x = 2 + \cos 2x$ 及 $3\sin x\cos x = \frac{3}{2}\sin 2x$，

$$\begin{aligned} x(\sin^2 x + 3\cos^2 x) - 3\sin x\cos x &= x(2 + \cos 2x) - \tfrac{3}{2}\sin 2x \\ &= 2x + x\cos 2x - \tfrac{3}{2}\sin 2x = h(x). \end{aligned}$$

所以該式子正正就是 $h(x)$，而它在 $0 < x < \frac{1}{4}\pi$ 時為正，這正是所需的結果。

第 (iv) 部分

當 $0 < x < \frac{1}{4}\pi$ 時，x、$\sin x$ 和 $\cos x$ 這幾個量全為正，所以 $F(x) > 0$，我們可以取對數：

$$\ln F(x) = \ln x + \tfrac{1}{3}\ln\cos x - \ln\sin x.$$

兩邊對 x 求導，

$$\frac{\mathrm{F}'(x)}{\mathrm{F}(x)} = \frac{1}{x} - \frac{\sin x}{3\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}.$$

想一想 怎樣看出它的正負號？

把它通分，公分母（common denominator）為 $3x\sin x\cos x$，在這個區間上是正數：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{F}'(x)}{\mathrm{F}(x)} &= \frac{3\sin x\cos x - x\sin^2 x - 3x\cos^2 x}{3x\sin x\cos x} \\ &= -\frac{x(\sin^2 x + 3\cos^2 x) - 3\sin x\cos x}{3x\sin x\cos x} = -\frac{\mathrm{h}(x)}{3x\sin x\cos x}.\end{aligned}$$

由第 (iii) 部分，分子 $\mathrm{h}(x)$ 為正，分母亦為正，所以 $\mathrm{F}'(x)/\mathrm{F}(x) < 0$。由於 $\mathrm{F}(x) > 0$，兩邊乘以它便得出當 $0 < x < \frac{1}{4}\pi$ 時 $\mathrm{F}'(x) < 0$，這正是所需的結果。

驗算

- 抽查數值：$\mathrm{F}(0.1) \approx 0.999998$、$\mathrm{F}(0.5) \approx 0.99849$ 及 $\mathrm{F}(\frac{1}{4}\pi) \approx 0.98954$，所以 F 是遞減的，只是減得很慢。
- 在 0 附近，這些不等式非常緊。展開成麥克勞林級數（Maclaurin series）可得 $\mathrm{h}(x) = \frac{4}{15}x^5 + \cdots$，而 x, x^3 兩項互相抵消。這就是為甚麼你不能單憑觀察就「看出」$\mathrm{h} > 0$，而需要這一連串導數。數值上，$\mathrm{h}(0.01)/0.01^5 \approx 0.26666$。
- 我們在 20 000 個隨機點上測試了全部四個不等式，以及恆等式 $\mathrm{g}' = \mathrm{f}\cos x$、$\mathrm{h}'(x) = \mathrm{g}(2x)$ 和 $\mathrm{F}'/\mathrm{F} = -\mathrm{h}/(3x\sin x\cos x)$。

常見錯誤

- 只論證 $\mathrm{f}'(x) \geq 0$，或忘記指出 $\mathrm{f}(0) = 0$。兩項事實都不可缺少：起點為零，以及導數嚴格為正。
- 在第 (iii) 部分使用第 (ii) 部分的結果，卻沒有檢查 $2x$ 是否落在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 之內。$x < \frac{1}{4}\pi$ 這個限制正是由此而來。
- 由 $\mathrm{F}'/\mathrm{F} < 0$ 推出 $\mathrm{F}' < 0$，卻沒有指出 $\mathrm{F} > 0$。

STEP 之外

「起點為零而導數為正，則函數為正」這個原理是中值定理的推論，而中值定理是大學分析（analysis）課程中最早遇到的重要定理之一。像本題這樣反覆運用這個原理，是證明

$\sin x > x - \frac{1}{6}x^3$ 這類不等式的標準方法，而且它與帶餘項的泰勒定理（Taylor's theorem）關係密切。Abbott 的 *Understanding Analysis*（分析學入門教科書）對中值定理及其應用有仔細的講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。