詳細解答

STEP II 1998，第 6 題

純數學 • 擺線與法線

> **STEP II 1998，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q6

關鍵思路

兩條曲線都是擺線（cycloid），即滾動的圓的圓周上一點所描出的路徑。只要用上半角公式（half-angle formulae）$1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$、$1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$ 和 $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$，有關它們的一切都會變得簡單。斜率（gradient）會化簡成 $\frac{\theta}{2}$ 的單一個正切或餘切，而法線（normal）的方程亦會縮成簡潔的一行。要證明一條直線是曲線 (2) 的切線（tangent），只需在 (2) 上找出一點，使該點在直線上，而且曲線在該點的斜率等於直線的斜率。

（題目中第二條曲線本應寫 y_2 的地方寫成了 y_1；這是印刷錯誤。）

解答

斜率

對於曲線 (1)，$\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\theta} = 1+\cos\theta$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta$，所以

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x_1} = \frac{-\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = -\tan\frac{\theta}{2},$$

此式在 $\cos\frac{\theta}{2} \neq 0$ 時成立，即 $\theta \neq \pi$。

對於曲線 (2)，$\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\theta} = 1-\cos\theta$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}\theta} = \sin\theta$，所以

$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x_2} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \cot\frac{\theta}{2},$$

此式在 $\theta \neq 0, 2\pi$ 時成立。

當 $\theta = \pi/2$ 時，$\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4}$：曲線 (1) 的斜率為 -1，曲線 (2) 的斜率為 1。

當 $\theta = 3\pi/2$ 時，$\frac{\theta}{2} = \frac{3\pi}{4}$，此時 $\tan = -1$ 且 $\cot = -1$：曲線 (1) 的斜率為 1，曲線 (2) 的斜率為 -1。

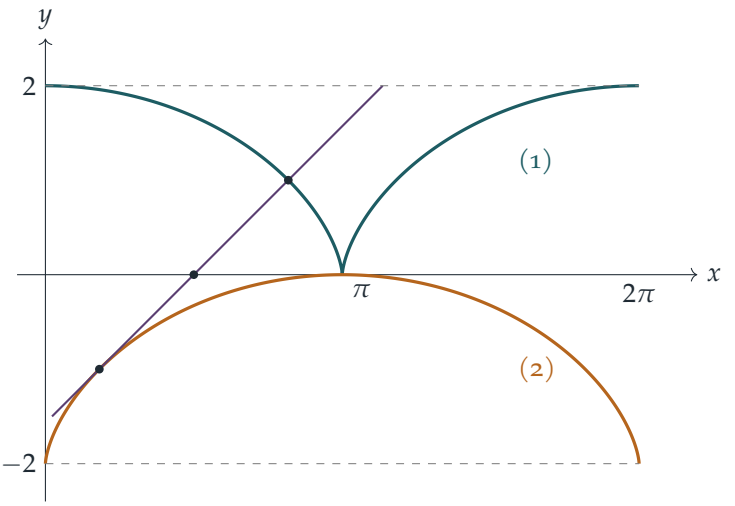
略圖

x_1 和 x_2 都是 θ 的非遞減函數（它們的導數 $1 \pm \cos\theta$ 永不為負），所以每條曲線都由左至右，從 $x = 0$ 延伸到 $x = 2\pi$。

曲線 (1) 由 $(0, 2)$ 出發，起點處斜率為 0，下降至 $(\pi, 0)$，然後對稱地上升至 $(2\pi, 2)$。當 $\theta = \pi$ 時，兩個導數同時為零，而 $|\mathrm{d}y_1/\mathrm{d}x_1| = |\tan\frac{\theta}{2}| \to \infty$，所以在 $(\pi, 0)$ 有一個尖點（cusp），該處的切線是鉛垂的。由於 $0 \le y_1 \le 2$，曲線位於 $y = 0$ 與 $y = 2$ 之間。

曲線 (2) 在 $(0, -2)$ 有一個尖點（切線鉛垂，因為 $\cot\frac{\theta}{2} \to \infty$），上升至 $(\pi, 0)$，該處的斜率為 $\cot\frac{\pi}{2} = 0$，然後下降至尖點 $(2\pi, -2)$。它是一個立於直線 $y = -2$ 上的普通擺線拱。

兩條曲線在 $(\pi, 0)$ 相接：曲線 (1) 鉛垂地到達該點，曲線 (2) 則水平地越過該點。整幅圖關於 $x = \pi$ 對稱，因為 $\theta \mapsto 2\pi - \theta$ 會令 $x \mapsto 2\pi - x$，而兩條曲線上的 y 都保持不變。圖中紫紅色的直線是 (1) 在 $\theta = \pi/2$ 處的法線，下文會再提到它。



曲線 (1) 的法線

(1) 的切線斜率為 $-\tan\frac{\theta}{2}$，所以法線的斜率為 $\cot\frac{\theta}{2}$（其中 $\theta \neq 0, \pi, 2\pi$；這些情況留待下文處理）。在點 $(\theta + \sin\theta,\ 1 + \cos\theta)$ 處的法線為

$$y - (1 + \cos\theta) = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}(x - \theta - \sin\theta).$$

全式乘以 $\sin\frac{\theta}{2}$，並使用半角形式：

$$y\sin\tfrac{\theta}{2} - 2\cos^2\tfrac{\theta}{2}\sin\tfrac{\theta}{2} = (x-\theta)\cos\tfrac{\theta}{2} - 2\sin\tfrac{\theta}{2}\cos^2\tfrac{\theta}{2}.$$

兩邊最後一項相等，可以互相抵消，剩下

$$\boxed{y\sin\tfrac{\theta}{2} = (x-\theta)\cos\tfrac{\theta}{2}}$$

這就是法線的方程。

這個形式同時涵蓋了那些例外的值。當 $\theta = 0$ 時，它變成 $x = 0$，即通過 $(0,2)$ 的鉛垂線；這是正確的，因為該處的切線是水平的。當 $\theta = 2\pi$ 時，同理可得 $x = 2\pi$。當 $\theta = \pi$ 時，它變成 $y = 0$，即通過尖點的水平線，與尖點處的鉛垂切線互相垂直。

留意法線必定通過 x 軸上的點 $(\theta, 0)$。這正是滾動的圓與它所滾過的直線相切的那一點，是擺線的一個經典性質。

法線是曲線 (2) 的切線

? **想一想** 法線應該與曲線 (2) 相切於哪一點？

(2) 在參數 (parameter) 為 ϕ 處的切線斜率為 $\cot\frac{\phi}{2}$，而法線的斜率為 $\cot\frac{\theta}{2}$。對於 ϕ, θ 在 $(0, 2\pi)$ 內的情況，兩者只在 $\phi = \theta$ 時相等，因為 cot 在 $(0,\pi)$ 上是一對一 (one-to-one) 的。所以唯一的候選點就是 (2) 上參數同為 θ 的那一點。

該點是 $(x_2, y_2) = (\theta - \sin\theta,\ -(1+\cos\theta))$。代入法線的方程：

$$\begin{aligned}
\text{左方} &= y_2\sin\tfrac{\theta}{2} = -2\cos^2\tfrac{\theta}{2}\sin\tfrac{\theta}{2},\\
\text{右方} &= (x_2-\theta)\cos\tfrac{\theta}{2} = -\sin\theta\cos\tfrac{\theta}{2} = -2\sin\tfrac{\theta}{2}\cos^2\tfrac{\theta}{2}.
\end{aligned}$$

兩者相等，所以 (1) 在 θ 處的法線通過 (2) 上參數為 θ 的點。在該點，(2) 的斜率為 $\cot\frac{\theta}{2}$，與法線的斜率相同。一條直線若通過曲線上某一點，而且斜率等於曲線在該點的斜率，它就是曲線在該點的切線，所以 (1) 的法線是 (2) 的切線，證明完畢。

特殊值的情況同樣成立。當 $\theta = \pi$ 時，法線 $y = 0$ 與 (2) 相切於其頂點 $(\pi, 0)$，該處 (2) 的斜率為 0。當 $\theta = 0$（或 2π）時，法線 $x = 0$（或 $x = 2\pi$）就是 (2) 在尖點處的鉛垂切線。

驗算

- 當 $\theta = \pi/2$ 時，法線為 $y = x - \frac{\pi}{2}$。它通過 (1) 上的 $(\frac{\pi}{2}+1, 1)$，通過 $(\frac{\pi}{2}, 0)$，亦通過 (2) 上的 $(\frac{\pi}{2}-1, -1)$，而 (2) 在該點的斜率為 1，與第一部分的結果一致。這就是略圖中紫紅色的直線。

- 以有限差分（finite differences）對斜率作數值驗算，結果與 $-1, 1$ 及 $1, -1$ 吻合至小數點後六位。在 1000 個隨機選取的 θ 值上，法線都通過兩個點，並且與 (2) 的切線平行，誤差在 10^{-12} 之內。

常見錯誤

- 把斜率保留為 $-\sin\theta/(1+\cos\theta)$ 的形式，然後在求法線時硬闖繁複的代數運算。用上半角形式，求法線只需兩行計算。
- 只證明了法線與曲線 (2) 相交。相交並不足夠：還須證明在交點處兩者的斜率相同。

STEP 之外

一條曲線的各個曲率中心（centres of curvature）所描出的曲線，稱為它的*漸屈線*（evolute），它同時也是該曲線所有法線的包絡線（envelope）。這道題說明了擺線的漸屈線是一條完全相同的擺線，只是平移了半個拱。沿法線由 (1) 到它與 (2) 的切點的距離為 $4|\cos\frac{\theta}{2}|$，剛好等於 (2) 由該點到其頂點的弧長（arc length）。所以 (1) 可以看成是一條由 (2) 上逐漸解開的繩子的末端所描出的曲線。惠更斯（Huygens）利用這一點造出了一個週期與擺幅無關的擺。想了解曲率、漸屈線和漸伸線（involutes），可參閱 Pressley 的 *Elementary Differential Geometry*（初等微分幾何）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。